

Otros problemas NP-completos

Notación

Si L es completo para $\mathcal{C}$, decimos que L es $\mathcal{C}$ -completo.

¿Cómo podemos demostrar que un problema L es NP-completo?

- ▶ Nos basta con demostrar que $L \in \text{NP}$ y que existe una reducción polinomial de SAT a L

Antes de utilizar esta técnica tenemos que pensar qué *versión* de SAT usar.

- ▶ En general es más fácil utilizar fórmulas en alguna forma normal

Otros problemas NP-completos

Una versión de SAT muy útil:

CNF-SAT = $\{\varphi \mid \varphi \text{ es una fórmula en CNF y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

¿Es CNF-SAT NP-completo?

- Podemos modificar la demostración del Teorema de Cook para mostrar esto

Teorema

CNF-SAT es NP-completo.

Pero algunas versiones de SAT son más simples ...

Otra versión de SAT:

DNF-SAT = $\{\varphi \mid \varphi \text{ es una fórmula en DNF y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

¿Es DNF-SAT NP-completo?

- ¿Podemos modificar la demostración del Teorema de Cook para mostrar esto?

Teorema

DNF-SAT está en PTIME.

Otros problemas NP-completos

Ahora podemos usar la idea inicial para mostrar que otros problemas son NP-completos.

Algunos ejemplos:

- ▶ $3\text{-CNF-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una fórmula en CNF que contiene tres literales por cláusula y es satisfacible}\}$
- ▶ $3\text{-COL} = \{G \mid G \text{ es un grafo 3-coloreable}\}$
- ▶ $\text{PRO-ENT} = \{(A, \vec{b}) \mid A \text{ es una matriz de enteros, } \vec{b} \text{ es un vector de enteros y existe un vector de enteros } \vec{x} \text{ tal que } A\vec{x} \leq \vec{b}\}$

La conjetura de Cook

Conjetura de Cook

$$\text{PTIME} \subsetneq \text{NP}$$

Si la conjetura es cierta:

- ▶ No existe un algoritmo eficiente para resolver SAT
- ▶ Tampoco existen algoritmos eficientes para resolver ninguno de los problemas NP-completos

¿Cuán fundamental es este problema?

La conjetura de Cook

Desde la página del Clay Mathematics Institute:

“In order to celebrate mathematics in the new millennium, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) established seven Prize Problems. The Prizes were conceived to record some of the most difficult problems with which mathematicians were grappling at the turn of the second millennium; to elevate in the consciousness of the general public the fact that in mathematics, the frontier is still open and abounds in important unsolved problems; to emphasize the importance of working towards a solution of the deepest, most difficult problems; and to recognize achievement in mathematics of historical magnitude.”

La conjetura de Cook

Uno de los siete problemas es **PTIME versus NP**:

“Suppose that you are organizing housing accommodations for a group of four hundred university students. Space is limited and only one hundred of the students will receive places in the dormitory. To complicate matters, the Dean has provided you with a list of pairs of incompatible students, and requested that no pair from this list appear in your final choice. This is an example of what computer scientists call an NP-problem, since it is easy to check if a given choice of one hundred students proposed by a coworker is satisfactory ..., however the task of generating such a list from scratch seems to be so hard as to be completely impractical ...”

Ejercicio

Muestre que el problema mencionado en este párrafo es NP-completo.