

La noción de reducción

Dado: Lenguajes L_1 y L_2 con alfabeto A .

Intuición: Decimos que un lenguaje L_1 es **reducible** a un lenguaje L_2 si existe un algoritmo tal que dado $w_1 \in A^*$, calcula $w_2 \in A^*$ tal que **$w_1 \in L_1$ si y sólo si $w_2 \in L_2$** .

Para formalizar esta idea necesitamos introducir la noción de **algoritmo que calcula**.

- Tenemos que introducir máquinas de Turing que calculan

Máquinas de Turing que calculan

Definición

Una MT M calcula una función $f : A^ \rightarrow A^*$ si:*

con entrada $w \in A^$, la máquina se detiene en un estado final teniendo en la memoria una cadena infinita de símbolos B seguida de $f(w)$ seguida de otra cadena infinita de símbolos B .*

Definición

*Una función f es **computable** si es que existe una máquina de Turing que calcula f .*

Máquinas de Turing que calculan

Ejemplo

Sea $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ una función definida como $g(w) = w0000$. Queremos demostrar que g es computable.

Sea $M = (Q, A, q_1, \delta, F)$, donde

- ▶ $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_F\}$.
- ▶ $A = \{0, 1\}$.
- ▶ $F = \{q_F\}$.
- ▶ δ es definida como:

$$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, \rightarrow)$$

$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, \rightarrow)$$

$$\delta(q_1, B) = (q_2, 0, \rightarrow)$$

$$\delta(q_2, B) = (q_3, 0, \rightarrow)$$

$$\delta(q_3, B) = (q_4, 0, \rightarrow)$$

$$\delta(q_4, B) = (q_F, 0, \rightarrow)$$

La noción de reducción: Formalización

Definición

Dados lenguajes L_1 y L_2 con alfabeto A , L_1 es *reducible* a L_2 si existe una función computable f tal que para todo $w \in A^*$:
 $w \in L_1$ si y sólo si $f(w) \in L_2$.

Teorema

Suponga que L_1 es reducible a L_2 .

- ▶ Si L_2 es decidable entonces L_1 es decidable
- ▶ Si L_1 es indecidible entonces L_2 es indecidible

Ejercicio

Demuestre el teorema.

El problema de la parada: Demostración

Por fin estamos listos para demostrar que el problema de la parada U es indecidible.

Demostración: Sea $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ definida como $g(w) = w0000w$.

Es fácil ver que g es computable y es una reducción de H a U .

Dado que H es indecidible, concluimos que U es indecidible.