



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253

Tarea 4

Entrega: Martes 9 de diciembre

1. [3 puntos] Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 5 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lfloor \log_2 n \rfloor & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Utilizando la técnica de cambio de variable y el teorema que permite extender una solución condicional a una solución general, encuentre una función f tal que $T \in O(f)$.

2. Dados dos números naturales a y b con n dígitos, el algoritmo usual para calcular $a \cdot b$ (el que aprendió en el colegio) realiza n^2 multiplicaciones de dígitos. En esta pregunta vamos a analizar un algoritmo que reduce este número de operaciones.

Un número a con $n > 1$ dígitos puede ser descompuesto de la siguiente forma:

$$a = a_1 \cdot 10^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_2,$$

donde a_1 es un número natural con $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ dígitos, y a_2 es un número natural con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dígitos. Por ejemplo, el número 37127 puede ser descompuesto de la siguiente forma:

$$37127 = 371 \cdot 10^2 + 27.$$

Entonces dados dos números naturales a y b con $n > 1$ dígitos, y cuyas descomposiciones son $a = a_1 \cdot 10^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_2$ y $b = b_1 \cdot 10^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + b_2$, tenemos que:

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 \cdot 10^{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot 10^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_2 \cdot b_2.$$

Así, para poder calcular $a \cdot b$ podemos calcular las multiplicaciones $a_1 \cdot b_1$, $a_1 \cdot b_2$, $a_2 \cdot b_1$ y $a_2 \cdot b_2$, lo cual nuevamente nos lleva a realizar n^2 multiplicaciones de dígitos. Una alternativa a este proceso, la cual usted debe analizar en esta pregunta, está basada en calcular las siguientes multiplicaciones:

$$r = a_1 \cdot b_1, \tag{1}$$

$$s = a_2 \cdot b_2, \tag{2}$$

$$t = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2), \tag{3}$$

para luego calcular $a \cdot b$ de la siguiente forma:

$$a \cdot b = r \cdot 10^{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (t - r - s) \cdot 10^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + s.$$

Considere un algoritmo que para multiplicar dos números a y b con $n \geq 1$ dígitos, utiliza el algoritmo usual para calcular $a \cdot b$ si $1 \leq n \leq 3$, y para $n > 3$ utiliza el procedimiento basado en las ecuaciones (1), (2) y (3). Responda las siguientes preguntas para este algoritmo.

- (a) [1.5 puntos] Sea $T(n)$ el número exacto de multiplicaciones de dígitos de realizadas por el algoritmo. Construya una ecuación de recurrencia para T .
- (b) [1.5 puntos] Demuestre que $T \in O(n^{\log_2 3})$.

Es importante considerar en esta pregunta que la suma de dos números con $k \geq 1$ dígitos puede generar un número con $k + 1$ dígitos, y que realizar una multiplicación de la forma $c \cdot 10^\ell$ ($\ell \geq 1$) no requiere de multiplicaciones de dígitos, sólo es necesario copiar ℓ ceros a la derecha de c . Además, recuerde que el análisis de este algoritmo debe realizarse considerando el peor caso.