



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253

Tarea 2

Entrega: Miércoles 22 de octubre

En esta tarea considere la siguiente definición de conjunto infinito: Un conjunto A es infinito si y sólo si existe un subconjunto propio A' de A tal que $A \approx A'$.

1. En esta pregunta usted va a demostrar que $\mathbb{N}$ es el conjunto infinito más pequeño.
 - (a) [0.7 puntos] Demuestre que si A es un conjunto infinito y $A \approx B$, entonces B es un conjunto infinito.
 - (b) [0.8 puntos] Demuestre que si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.
2. Sea P un conjunto de variables proposicionales. Para cada fórmula $\alpha \in L(P)$, definimos $\text{var}(\alpha)$ como el conjunto de las variables proposicionales mencionadas en α . Por ejemplo $\text{var}(p) = \{p\}$, $\text{var}(p \wedge q) = \{p, q\}$ y $\text{var}((p \wedge q) \rightarrow \neg p) = \{p, q\}$. Además, definimos $\equiv_v$ como una relación sobre $L(P)$ tal que para cada $\alpha \in L(P)$ y $\beta \in L(P)$, se tiene que $\alpha \equiv_v \beta$ si y sólo si $\alpha \equiv \beta$ y $\text{var}(\alpha) = \text{var}(\beta)$.
 - (a) [0.3 puntos] Demuestre que $\equiv_v$ es una relación de equivalencia sobre $L(P)$.
 - (b) [0.6 puntos] Demuestre que si $|P| = n$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 1$, entonces se tiene que $|L(P)/\equiv_v| \leq 2^{2^{n+1}}$.
 - (c) [0.6 puntos] Demuestre que si P es un conjunto infinito, entonces $L(P)/\equiv_v$ es un conjunto infinito.
3. [1.5 puntos] En esta pregunta usted debe encontrar una relación de equivalencia $\sim$ sobre $2^{\mathbb{N}}$ tal que $(2^{\mathbb{N}}/\sim) \approx \mathbb{N}$. Vale decir, usted debe definir $\sim$, demostrar que es una relación de equivalencia, construir $2^{\mathbb{N}}/\sim$ y demostrar que $(2^{\mathbb{N}}/\sim) \approx \mathbb{N}$.
4. Sea $\preceq$ un orden total sobre un conjunto A . Decimos que $\preceq$ es un buen orden para A si para cada $B \subseteq A$ tal que $B \neq \emptyset$, se tiene que B tiene un menor elemento bajo $\preceq$, vale decir, se tiene que existe $a \in B$ tal que para todo $b \in B$ se cumple que $a \preceq b$. Por ejemplo, el orden usual $\leq$ para $\mathbb{N}$ es un buen orden para $\mathbb{N}$, mientras que el orden usual $\leq$ para $\mathbb{Z}$ no es un buen orden para este conjunto, puesto que $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq 0\} \subseteq \mathbb{Z}$ y $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq 0\}$ no tiene un menor elemento bajo $\leq$.
 - (a) [0.2 puntos] Construya un orden total $\preceq$ para $\mathbb{N}$ tal que $\preceq$ no es un buen orden para $\mathbb{N}$.
 - (b) [0.2 puntos] Construya un orden total $\preceq$ para $\mathbb{Z}$ tal que $\preceq$ es un buen orden para $\mathbb{Z}$.
 - (c) [1.1 puntos] Sea $\text{BO}(\mathbb{N})$ el conjunto de todos los ordenes totales $\preceq$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $\preceq$ es un buen orden para $\mathbb{N}$. Demuestre que $\text{BO}(\mathbb{N}) \approx 2^{\mathbb{N}}$.