



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Tarea 1
Entrega: Miércoles 17 de septiembre

1. El conjunto de los x -términos se define como el menor conjunto T tal que:

- $x \in T$,
- si $t_1 \in T$ y $t_2 \in T$, entonces $f(t_1, t_2) \in T$.

Por ejemplo, x , $f(x, x)$ y $f(f(x, x), x)$ son x -términos.

- (a) [0.2 puntos] Defina de manera inductiva la función $la(t)$ que entrega el largo de un x -término t , donde los símbolos x , f , $(,)$ y $,$ son considerados como un elemento de largo 1. Por ejemplo, $la(x) = 1$, $la(f(x, x)) = 6$ y $la(f(f(x, x), x)) = 11$.
 - (b) [0.3 puntos] Defina de manera inductiva la función $an(t)$ que indica cuál es el mayor grado de anidación de la función f en un x -término t . Por ejemplo, $an(x) = 0$, $an(f(x, x)) = 1$, $an(f(f(x, x), x)) = 2$ y $an(f(f(x, x), f(x, f(x, x)))) = 3$.
 - (c) [1 punto] Encuentre una función $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo x -término t se tiene que $la(t) \leq h(an(t))$. Además demuestre usando inducción estructural en los x -términos que la función h cumple esta propiedad.
2. [1.5 puntos] Sea P un conjunto de variables proposicionales. Para cada fórmula $\alpha \in L(P)$, definimos $var(\alpha)$ como el conjunto de las variables proposicionales mencionadas en α . Por ejemplo $var(p) = \{p\}$, $var(p \wedge q) = \{p, q\}$ y $var((p \wedge q) \rightarrow \neg p) = \{p, q\}$.
- Suponga que φ, ψ son fórmulas en $L(P)$ tales que $var(\varphi) \cap var(\psi) \neq \emptyset$ y $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una tautología. Demuestre que existe una fórmula θ tal que $var(\theta) = var(\varphi) \cap var(\psi)$, $(\varphi \rightarrow \theta)$ es una tautología y $(\theta \rightarrow \psi)$ es una tautología.
3. [1.5 puntos] Un autómata finito determinístico (AFD) es una tupla $\mathcal{A} = (Q, q_0, \delta, F)$, donde Q es un conjunto finito de estados, $q_0 \in Q$ es el estado inicial, $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales y $\delta : Q \times \{0, 1\} \rightarrow Q$ es la función de transición. Dado un estado $q \in Q$ y un string w sobre $\{0, 1\}$, la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w a partir de q termina en un estado que es definido por la siguiente función:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \varepsilon) &= q \\ \hat{\delta}(q, aw) &= \hat{\delta}(\delta(q, a), w)\end{aligned}$$

Finalmente, el conjunto de strings sobre $\{0, 1\}$ aceptados por $\mathcal{A}$, denotado como $L(\mathcal{A})$, es definido como $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$. Por ejemplo, suponga que $\mathcal{A} = (Q, q_0, \delta, F)$, donde $Q = \{q_0, q_1\}$,

$F = \{q_0\}$ y δ es definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, 0) &= q_1 \\ \delta(q_0, 1) &= q_0 \\ \delta(q_1, 0) &= q_0 \\ \delta(q_1, 1) &= q_1\end{aligned}$$

Entonces se tiene que $L(\mathcal{A}) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{el número de símbolos } 0 \text{ en } w \text{ es par}\}$.

Cada string sobre $\{0, 1\}$ puede ser representado como una fórmula proposicional Φ_w . Suponga que $n \geq 1$, $w = a_1 \cdots a_n$ y $x_1, \dots, x_n$ es una secuencia de n variables proposicionales distintas. Entonces se tiene que:

$$\Phi_w = \left(\bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\} : a_i = 1} x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in \{1, \dots, n\} : a_j = 0} \neg x_j \right).$$

Por ejemplo, si $w = 0010$ se tiene que $\Phi_w = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$.

En esta pregunta usted va a mostrar que el funcionamiento de un AFD puede ser codificado usando lógica proposicional. De manera precisa, dado un AFD $\mathcal{A}$ y $n \geq 1$, usted debe construir una fórmula proposicional Ψ_n tal que para todo string w sobre $\{0, 1\}$ de largo n , se tiene que:

$$w \in L(\mathcal{A}) \quad \text{si y sólo si} \quad (\Phi_w \wedge \Psi_n) \text{ es satisfacible.}$$

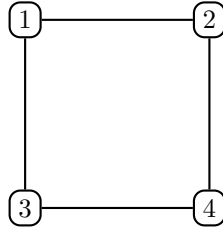
Además, la fórmula Ψ_n debe ser de tamaño polinomial en n , vale decir, debe existir un polinomio p tal que $\text{la}(\Psi_n) \leq p(n)$, donde $\text{la}(\alpha)$ es el largo de una fórmula α .

4. [1.5 puntos] En esta pregunta sólo consideramos grafos no-dirigidos sin arcos de la forma (a, a) , a los cuales llamamos grafos no-dirigidos sin-loops. Para este tipo de grafos usamos la notación $\{a, b\}$ para representar un arco.

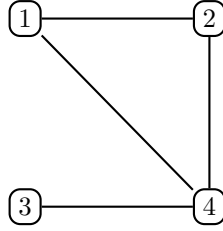
Suponga que G es un grafo no-dirigido sin-loops y k, ℓ son números naturales. Entonces decimos que G tiene un k - ℓ -clique si existen conjuntos

$$\begin{aligned}\{e_1, \dots, e_m\} &\subseteq A \\ \{e'_1, \dots, e'_m\} &\subseteq \{\{a, b\} \mid a \in N, b \in N \text{ y } a \neq b\} \setminus A\end{aligned}$$

tales que $0 \leq m \leq \ell$ y $G' = (N, A')$ tiene un clique de tamaño k , donde $A' = (A \setminus \{e_1, \dots, e_m\}) \cup \{e'_1, \dots, e'_m\}$. Por ejemplo, suponga que G es el siguiente grafo:



Entonces se cumple que G no tiene un 3-0-clique ya que no contiene un clique de tamaño 3, pero G si tiene un 3-1-clique ya que el grafo que resulta al reemplazar el arco $\{1, 3\}$ por el arco $\{1, 4\}$ tiene una clique de tamaño 3:



Dado un grafo $G = (N, A)$ no-dirigido sin-loops, donde $|N| \geq 1$, y dados números naturales k y ℓ tales que $k \leq |N|$ y $\ell \leq |A|$, en esta pregunta usted debe construir una fórmula proposicional φ tal que: φ es satisfacible si y sólo si G tiene un k - ℓ -clique. Además, la fórmula φ debe ser de tamaño polinomial en el tamaño de la entrada, vale decir, debe existir un polinomio p tal que $\text{la}(\varphi) \leq p(n, k, \ell)$.