PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Examen

1. Sea P un conjunto de variables proposicionales, y defina la relación $\preceq$ sobre $L(P)/\equiv$ de la siguiente forma. Para cada $\alpha \in L(P)$ y $\beta \in L(P)$, se tiene que:

$$[\alpha]_{\equiv} \preceq [\beta]_{\equiv} \quad \text{si y sólo si} \quad \text{existe } \gamma \in L(P) \text{ tal que } (\alpha \wedge \gamma) \equiv \beta.$$

En esta pregunta usted va a estudiar algunas propiedades de la relación $\preceq$.

   (a) [0.5 puntos] Demuestre que $\preceq$ está bien definida.

   (b) [1 punto] Demuestre que $\preceq$ es un orden parcial sobre $L(P)/\equiv$.

2. Responda las siguientes preguntas sobre cardinalidad.

   (a) [0.8 puntos] Demuestre que para cada conjunto infinito A se tiene que $A \prec 2^A$.

   (b) [0.7 puntos] Demuestre que $\mathbb{R} \approx 2^{\mathbb{N}}$.

3. En esta pregunta usted va a demostrar que existen secuencias arbitrariamente grandes de números naturales consecutivos que no contienen números primos.

   (a) [0.5 puntos] Sea n_1, n_2, $\ldots$, n_k una secuencia de $k \geq 2$ números naturales mayores a 1 tales que $\text{MCD}(n_i, n_j) = 1$, para cada $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $i \neq j$. Demuestre que para cada secuencia a_1, a_2, $\ldots$, a_k de números naturales, existe un número natural x tal que:

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod n_1 \\ x &\equiv a_2 \mod n_2 \\ &\cdots \\ x &\equiv a_k \mod n_k \end{aligned}$$

   (b) [1 punto] Demuestre que para cada $\ell \geq 2$, existe una secuencia m_1, $\ldots$, m_ℓ de números naturales tales que: (1) m_i no es un número primo, para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$; y (2) $m_{i+1} = m_i + 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$.

   Hint: Utilice (a) y el hecho que existe un conjunto infinito de números primos.

4. En esta pregunta usamos la notación $L[1 \ldots n]$ para referirnos a una lista de $n \geq 1$ números naturales, y usamos la notación $L[i]$ para referirnos al número i-ésimo en esta lista. Considere la siguiente función para calcular el máximo valor en una lista $L[1 \ldots n]$:

```
max(L[1...n])
    if n = 1 then return L[1]
    else
        r = max(L[1...⌊n/2⌋])
        s = max(L[⌊n/2⌋ + 1...n])
        if r > s then return r
        else return s
```

Conteste las siguiente preguntas.

(a) [0.7 puntos] Sea $T(n)$ el número de comparaciones entre números de la lista $L[1 \ldots n]$ realizadas por el algoritmo **max** para encontrar el máximo de L. Determine una ecuación de recurrencia para T.

(b) [0.8 puntos] Determine una función f tal que $T(n) \in O(f(n))$. Justifique por qué se cumple que $T(n) \in O(f(n))$.

Importante: El puntaje asignado a su solución dependerá de qué tan buena es la cota superior encontrada.