PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Interrogación 3

En esta prueba usted debe responder 4 de las 5 preguntas enunciadas. Además, debe considerar la siguiente noción de definibilidad. Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y un conjunto $S \subseteq A$, decimos que S es definible en $\mathfrak{A}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que:

$$S \quad = \quad \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}.$$

1. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathfrak{A} = \langle A, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura tal que $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden lineal sobre A.
   (a) [0.7 puntos] Demuestre que si A es finito, entonces para todo $S \subseteq A$ se tiene que S es definible en $\mathfrak{A}$.
   (b) [0.8 puntos] Demuestre que si $A = \mathbb{N}$, entonces existe $S \subseteq A$ tal que S no es definible en $\mathfrak{A}$.
2. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\mathfrak{A} = \langle A \rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura.
   (a) [1.0 punto] Demuestre que para toda asignación σ para $\mathfrak{A}$, biyección $f : A \to A$ y $\mathcal{L}$-fórmula φ, se tiene que:
   $$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad (\mathfrak{A}, f \circ \sigma) \models \varphi$$
   (b) [0.5 puntos] Utilizando (a) demuestre que para todo conjunto $S \subseteq A$, se tiene que:
   $$S \text{ es definible en } \mathfrak{A} \quad \text{si y sólo si} \quad S = \emptyset \text{ o } S = A.$$
3. [1.5 puntos] Sea $\mathcal{L} = \{C, D, R\}$, donde C y D son predicados unarios, y R es un predicado binario. Construya una $\mathcal{L}$-oración Φ tal que:
   - para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A} \models \Phi$, entonces se tiene que $C^{\mathfrak{A}} \cap D^{\mathfrak{A}} = \emptyset$ y $|C^{\mathfrak{A}}| = |D^{\mathfrak{A}}|$; y
   - para cada número natural $n \geq 1$, existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, C^{\mathfrak{A}}, D^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}} \rangle$ tal que $\mathfrak{A} \models \Phi$ y $|C^{\mathfrak{A}}| = |D^{\mathfrak{A}}| = n$.
4. [1.5 puntos] Sea $\mathcal{L} = \{<\}$. Además, sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura tal que $<^{\mathfrak{A}}$ es el orden usual para los números naturales, y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura tal que $<^{\mathfrak{B}}$ es el orden lexicográfico usual para los pares de números naturales (vale decir, $(a, b) <^{\mathfrak{B}} (c, d)$ si y sólo si se tiene que $a <^{\mathfrak{A}} c$ o se tiene que $a = c$ y $b <^{\mathfrak{A}} d$). Construya una $\mathcal{L}$-oración φ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, y justifique por qué se cumplen estas condiciones.
5. [1.5 puntos] Sea p un número primo. Demuestre que para cada $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ y cada número natural $i \geq 1$, se tiene que:
   $$a^{p^{i-1} \cdot (p-1)} \quad \equiv \quad 1 \mod p^i$$