



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Interrogación 1

1. Sea X el menor conjunto que satisface las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in X$;
- si $A \in X$, entonces $\{A\} \in X$;
- si $A \in X$ y $B \in X$, entonces $(A \cup B) \in X$.

Responda las siguientes preguntas.

- (a) [0.5 puntos] Formule un principio de inducción para X .
- (b) [1.0 puntos] Usando el principio de inducción formulado en (a), demuestre que X es cerrado bajo intersección, vale decir, demuestre que si $A \in X$ y $B \in X$, entonces $(A \cap B) \in X$.
2. [1.5 puntos] Suponga que $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ con $n \geq 2$, y sea Φ la fórmula $(x_1 \wedge x_2)$. Además, defina TAU_Φ como el siguiente conjunto:

$$\text{TAU}_\Phi = \{\psi \in L(P) \mid (\psi \rightarrow \Phi) \text{ es una tautología}\}.$$

Indique cuántas fórmulas hasta equivalencia lógica contiene el conjunto TAU_Φ como una función de n . Por ejemplo, si $n = 2$, entonces tenemos que esta cantidad es 2 ya que $(x_1 \wedge \neg x_1) \in \text{TAU}_\Phi$, $(x_1 \wedge x_2) \in \text{TAU}_\Phi$, $(x_1 \wedge \neg x_1) \not\equiv (x_1 \wedge x_2)$ y para todo $\psi \in \text{TAU}_\Phi$ se tiene que $\psi \equiv (x_1 \wedge \neg x_1)$ o $\psi \equiv (x_1 \wedge x_2)$. Justifique su respuesta.

3. [1.5 puntos] En esta pregunta sólo consideramos grafos no-dirigidos sin arcos de la forma (a, a) , a los cuales llamamos grafos no-dirigidos sin-loops. Para este tipo de grafos usamos la notación $\{a, b\}$ para representar un arco.

Suponga que $G = (N, A)$ es un grafo no-dirigido sin-loops y m es un número natural tal que $1 \leq m \leq |N|$. Entonces decimos que G tiene un clique de tamaño m si existe un grafo $G' = (N', A')$ tal que: $N' \subseteq N$, $A' \subseteq A$, $|N'| = m$ y para cada par de nodos distintos $a, b \in N'$, se tiene que $\{a, b\} \in A'$.

Dado un grafo $G = (N, A)$ no-dirigido sin-loops, donde $|N| \geq 1$, y dados números naturales m y n tales que $1 \leq m \leq |N|$ y $1 \leq n \leq |N|$, en esta pregunta usted debe construir una fórmula proposicional φ tal que: φ es satisfacible si y sólo si G tiene al menos n cliques de tamaño m distintos. Además, la fórmula φ debe ser de tamaño polinomial en el tamaño de la entrada, vale decir, debe existir un polinomio p tal que $\text{la}(\varphi) \leq p(|N|, m, n)$.

4. [1.5 puntos] Suponga que $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ con $n \geq 10$, y recuerde que $\text{la}(\alpha)$ es la función que indica el largo de una fórmula $\alpha \in L(P)$. Demuestre que existe una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que:

$$\text{para toda fórmula } \psi \in L(P), \text{ si } \psi \equiv \varphi, \text{ entonces } \text{la}(\psi) > n^2.$$

Hint: En esta pregunta puede servir contar y comparar.