



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Interrogación 1

1. Sea X el menor conjunto que satisface las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in X$;
- si $A \in X$, entonces $\{A\} \in X$;
- si $A \in X$ y $B \in X$, entonces $(A \cup B) \in X$.

Responda las siguientes preguntas.

- (a) [0.5 puntos] Formule un principio de inducción para X .
- (b) [1.0 puntos] Usando el principio de inducción formulado en (a), demuestre que X es cerrado bajo intersección, vale decir, demuestre que si $A \in X$ y $B \in X$, entonces $(A \cap B) \in X$.

Solución:

- (a) El siguiente es un principio de inducción para X : Si para $Y \subseteq X$ se tiene que
- $\emptyset \in Y$,
 - si $A \in Y$, entonces $\{A\} \in Y$,
 - si $A \in Y$ y $B \in Y$, entonces $(A \cup B) \in Y$,
- entonces concluimos que $Y = X$.
- (b) Para resolver este problema primero debemos escoger el conjunto Y mencionado en (a). En este caso definimos Y de la siguiente forma:

$$Y = \{A \in X \mid \text{para todo } B \in X \text{ se tiene que } (A \cap B) \in X\}.$$

Si demostramos que $Y = X$, entonces concluimos que X es cerrado bajo intersección. Para hacer esto primero notamos que $Y \subseteq X$, lo cual nos dice que podemos usar el principio de inducción formulado en (a):

- Caso base: tenemos que $\emptyset \in Y$ ya que $\emptyset \in X$ y $\emptyset \cap B = \emptyset$ para todo $B \in X$.
- Suponemos que $A \in Y$, y tenemos que demostrar que $\{A\} \in Y$. Nótese que dado que $A \in Y$, se tiene que $A \in X$, y por lo tanto concluimos que $\{A\} \in X$.
Para hacer esta demostración consideramos un conjunto arbitrario $B \in X$, y razonamos sobre los posibles valores de $(\{A\} \cap B)$:
 - Si $A \in B$, entonces $(\{A\} \cap B) = \{A\}$, de lo cual concluimos que $(\{A\} \cap B) \in X$ (puesto que $\{A\} \in X$).

- Si $A \notin B$, entonces $(\{A\} \cap B) = \emptyset$, de lo cual concluimos que $(\{A\} \cap B) \in X$.

De los dos puntos anteriores concluimos que $\{A\} \in Y$.

- Finalmente suponemos que $A_1 \in Y$ y $A_2 \in Y$, y tenemos que demostrar que $(A_1 \cup A_2) \in Y$. Sea $B \in X$. Por hipótesis de inducción tenemos que $(A_1 \cap B) \in X$ y $(A_2 \cap B) \in X$. Por lo tanto, tenemos que $((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) \in X$ por definición de X . Pero

$$((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) = ((A_1 \cup A_2) \cap B),$$

de lo cual concluimos que $((A_1 \cup A_2) \cap B) \in X$. De esta forma, concluimos que $(A_1 \cup A_2) \in Y$ puesto que B es un conjunto arbitrario en X .

2. [1.5 puntos] Suponga que $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ con $n \geq 2$, y sea Φ la fórmula $(x_1 \wedge x_2)$. Además, defina TAU_Φ como el siguiente conjunto:

$$\text{TAU}_\Phi = \{\psi \in L(P) \mid (\psi \rightarrow \Phi) \text{ es una tautología}\}.$$

Indique cuántas fórmulas hasta equivalencia lógica contiene el conjunto TAU_Φ como una función de n . Por ejemplo, si $n = 2$, entonces tenemos que esta cantidad es 2 ya que $(x_1 \wedge \neg x_1) \in \text{TAU}_\Phi$, $(x_1 \wedge x_2) \in \text{TAU}_\Phi$, $(x_1 \wedge \neg x_1) \not\equiv (x_1 \wedge x_2)$ y para todo $\psi \in \text{TAU}_\Phi$ se tiene que $\psi \equiv (x_1 \wedge \neg x_1)$ o $\psi \equiv (x_1 \wedge x_2)$. Justifique su respuesta.

Solución: Dado que necesitamos contar el número de fórmulas $\psi \in \text{TAU}_\Phi$ hasta equivalencia lógica, nos conviene utilizar tablas de verdad. De manera precisa, para resolver este problema basta contar el número de tablas de verdad para $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que la fórmula ψ representada por esta tabla satisface que $(\psi \rightarrow \Phi)$ es una tautología. Para realizar este análisis, dividimos la tabla de verdad para ψ de la siguiente forma:

	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	ψ
$T_{00} \left\{ \right.$	0	0				
$T_{01} \left\{ \right.$	0	1				
$T_{10} \left\{ \right.$	1	0				
$T_{11} \left\{ \right.$	1	1				

En esta tabla, T_{ij} (con $i = 0, 1$ y $j = 0, 1$) representa al conjunto de filas para las cuales se asigna el valor i a x_1 y el valor j a x_2 . Por ejemplo T_{00} representa al conjunto de filas para las cuales se asigna el valor 0 a x_1 y el valor 0 a x_2 , mientras que T_{01} representa al conjunto de filas para las cuales se asigna el valor 0 a x_1 y el valor 1 a x_2 .

Dado que $(\psi \rightarrow \Phi)$ debe ser una tautología, para cada fila en T_{00} se debe tener un 0 como valor de ψ , ya que en caso contrario se tendría una valuación σ tal que $\hat{\sigma}(\psi \rightarrow \Phi) = 0$ puesto que $\hat{\sigma}(\psi) = 1$ y $\hat{\sigma}(x_1 \wedge x_2) = 0$. De la misma forma concluimos que para cada fila en T_{01} y T_{10} se debe tener un 0 como valor de ψ . Finalmente para cada fila de T_{11} podemos tener valor 0 ó 1, ya que para todas estas filas Φ tiene valor 1. De este modo, para resolver este problema debemos contar el número de tablas de verdad de la siguiente forma:

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	ψ	Φ	$\psi \rightarrow \Phi$
T_{00}	0	0				0	0	1
T_{01}	0	1				0	0	1
T_{10}	1	0				0	0	1
T_{11}	1	1				0 ó 1	1	1

Para contar este número de tablas de verdad, primero debemos determinar el número de filas en T_{11} . Dada que en cada una de estas filas el valor 1 es asignado tanto a x_1 como a x_2 y para el resto de las variables tenemos completa libertad, tenemos que el número de filas en T_{11} es 2^{n-2} . Finalmente, dado que para cada una de estas filas podemos elegir 0 ó 1 al construir ψ , tenemos que el número de fórmulas $\psi \in \text{TAU}_{\Phi}$ hasta equivalencia lógica es $2^{2^{n-2}}$.

3. [1.5 puntos] En esta pregunta sólo consideramos grafos no-dirigidos sin arcos de la forma (a, a) , a los cuales llamamos grafos no-dirigidos sin-loops. Para este tipo de grafos usamos la notación $\{a, b\}$ para representar un arco.

Suponga que $G = (N, A)$ es un grafo no-dirigido sin-loops y m es un número natural tal que $1 \leq m \leq |N|$. Entonces decimos que G tiene un clique de tamaño m si existe un grafo $G' = (N', A')$ tal que: $N' \subseteq N$, $A' \subseteq A$, $|N'| = m$ y para cada par de nodos distintos $a, b \in N'$, se tiene que $\{a, b\} \in A'$.

Dado un grafo $G = (N, A)$ no-dirigido sin-loops, donde $|N| \geq 1$, y dados números naturales m y n tales que $1 \leq m \leq |N|$ y $1 \leq n \leq |N|$, en esta pregunta usted debe construir una fórmula proposicional φ tal que: φ es satisfacible si y sólo si G tiene al menos n cliques de tamaño m distintos. Además, la fórmula φ debe ser de tamaño polinomial en el tamaño de la entrada, vale decir, debe existir un polinomio p tal que $\text{la}(\varphi) \leq p(|N|, m, n)$.

Solución: Para resolver este problema consideramos las siguientes variables proposicionales:

- $e_{i,j}$: indica que (i, j) es un arco en G , con $i \in N$ y $j \in N$,
- $x_{i,j,k}$: indica que en el clique i , el j -ésimo elemento es k , con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ y $k \in N$.

Dadas estas variables, definimos φ como $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4)$, donde:

- Formula φ_1 indica que para cada clique i ($1 \leq i \leq n$), exactamente un elemento $k \in N$ es el j -ésimo elemento de i ($1 \leq j \leq m$):

$$\bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^m \bigvee_{k \in N} \left(x_{i,j,k} \wedge \bigwedge_{\ell \in (N \setminus \{k\})} \neg x_{i,j,\ell} \right)$$

- Formula φ_2 indica que para cada clique i ($1 \leq i \leq n$), si $k_1 \in N$ es el j_1 -ésimo elemento de i ($1 \leq j_1 \leq m$), $k_2 \in N$ es el j_2 -ésimo elemento de i ($1 \leq j_2 \leq m$) y $j_1 \neq j_2$, entonces se debe tener que (k_1, k_2) es un arco en G .

$$\bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j_1=1}^m \bigwedge_{k_1 \in N} \bigwedge_{j_2 \in (\{1, \dots, m\} \setminus \{j_1\})} \bigwedge_{k_2 \in N} \left((x_{i,j_1,k_1} \wedge x_{i,j_2,k_2}) \rightarrow e_{k_1,k_2} \right)$$

- Fórmula φ_3 indica que para cada par i_1, i_2 de cliques ($1 \leq i_1 \leq n$ y $1 \leq i_2 \leq n$), si $i_1 \neq i_2$, entonces debe existir un nodo $k \in N$ que es parte de i_1 pero no de i_2 (puesto que estos cliques deben ser distintos):

$$\bigwedge_{i_1=1}^n \bigwedge_{i_2 \in (\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\})} \bigvee_{j_1=1}^m \bigvee_{k \in N} \left(x_{i_1, j_1, k} \wedge \neg \left(\bigvee_{j_2=1}^m x_{i_2, j_2, k} \right) \right)$$

- Fórmula φ_4 describe los arcos del grafo G :

$$\left(\bigwedge_{(i,j) \in A} e_{i,j} \right) \wedge \left(\bigwedge_{(k,\ell) \in (N \times N \setminus A)} \neg e_{k,\ell} \right)$$

Se puede demostrar que φ es satisfacible si y sólo si G tiene al menos n cliques de tamaño m distintos, y también que existe un polinomio p tal que $\text{la}(\varphi) \leq p(|N|, m, n)$.

4. [1.5 puntos] Suponga que $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ con $n \geq 10$, y recuerde que $\text{la}(\alpha)$ es la función que indica el largo de una fórmula $\alpha \in L(P)$. Demuestre que existe una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que:

para toda fórmula $\psi \in L(P)$, si $\psi \equiv \varphi$, entonces $\text{la}(\psi) > n^2$.

Hint: En esta pregunta puede servir contar y comparar.

Solución: Para resolver este problema consideramos las siguientes cantidades:

- (i) el número de fórmulas en $L(P)$ hasta equivalencia lógica, y
- (ii) el número de fórmulas $\alpha \in L(P)$ tal que $\text{la}(\alpha) \leq n^2$.

Si demostramos que (i) es mayor que (ii), entonces concluimos que existe una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que para toda fórmula $\psi \in L(P)$, si $\psi \equiv \varphi$, entonces $\text{la}(\psi) > n^2$.

Sabemos que (i) es igual al número de tablas de verdad para P , vale decir 2^{2^n} . Para el caso (ii), sabemos que este número está acotado superiormente por el número de strings w sobre el alfabeto $P \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ tal que el largo de w es mayor que 0 y menor o igual a n^2 . Vale decir, (ii) está acotado superiormente por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^2} (n+7)^i &< \sum_{i=1}^{n^2} (n+7)^{n^2} \\ &= n^2 (n+7)^{n^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para terminar este problema debemos demostrar que $n^2(n+7)^{n^2} < 2^{2^n}$ para todo $n \geq 10$. Esta demostración puede hacerse por inducción en $n \geq 10$. Dejamos esto al lector, y sólo mostramos que es simple demostrar que $n^2(n+7)^{n^2} < 2^{2^n}$ para el caso $n = 10$. En primer lugar sabemos que:

$$\begin{aligned} 10^2(10+7)^{10^2} &= 100 \cdot 17^{100} \\ &< 17^{102} \end{aligned}$$

En segundo lugar tenemos que:

$$\begin{aligned} 2^{2^{10}} &= 2^{1024} \\ &> 2^{1000} \\ &= (2^5)^{200} \\ &= 32^{200} \end{aligned}$$

Entonces dado que $2^{2^{10}} > 32^{200} > 17^{102} > 10^2(10+7)^{10^2}$, concluimos que la propiedad se cumple para $n = 10$.