



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Interrogación 1

1. [1.5 puntos] Demuestre usando inducción que para cada fórmula α en lógica proposicional, si β es un prefijo propio de α , entonces el número de paréntesis izquierdos de β es mayor que el número de paréntesis derechos de β .
2. [1.5 puntos] Dado $n \geq 1$, sea IMPAR_n un conectivo n -ario definido de la siguiente forma. Dada una valuación σ para las variables $x_1, \dots, x_n$, se tiene que $\sigma(\text{IMPAR}_n(x_1, \dots, x_n)) = 1$ si y sólo si $\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(x_i) = 1\}$ es un conjunto con una cantidad impar de elementos. Por ejemplo, la siguiente es la tabla de verdad para $n = 3$:

x_1	x_2	x_3	$\text{IMPAR}_3(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Demuestre que el conjunto (infinito) de conectivos $\{\text{IMPAR}_n \mid n \geq 1\}$ no es funcionalmente completo.

3. [1.5 puntos] Sea φ la siguiente fórmula en lógica proposicional:

$$(p \rightarrow (\neg q)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \wedge (\neg r)))$$

Construya una fórmula ψ en CNF que sea equivalente a φ .

4. [1.5 puntos] Dados dos grafos $G_1 = (N_1, A_1)$ y $G_2 = (N_2, A_2)$, una función $h : N_1 \rightarrow N_2$ se dice un homomorfismo de G_1 en G_2 si para todo $(a, b) \in A_1$, se tiene que $(h(a), h(b)) \in A_2$. Además, h se dice un homomorfismo propio de G_1 en G_2 si h es un homomorfismo de G_1 en G_2 y h no es una función sobre (vale decir, existe un nodo en G_2 que no es la imagen bajo h de ningún nodo en G_1). Finalmente, un grafo G se dice non-lean si existe un homomorfismo propio de G en G .

Suponga que $G = (N, A)$, donde $N = \{1, \dots, n\}$. Construya una fórmula φ en lógica proposicional tal que G es non-lean si y sólo si φ es satisfacible.

Importante: La fórmula φ construida en esta pregunta debe ser de tamaño polinomial en n , vale decir, debe existir un polinomio $p(x)$ tal que $\text{la}(\varphi) \leq p(n)$.