



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253

Guía 3

Lógica de primer orden

1. Indique si las siguientes afirmaciones son ciertas. Justifique su respuesta.

- (a) $\{\forall x \forall y R(x, y) \rightarrow R(y, x), \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)\} \models \forall x R(x, x)$
 (b) $\{\forall x \exists y R(x, y), \forall x \forall y R(x, y) \rightarrow R(y, x), \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)\} \models \forall x R(x, x)$

2. ¿Es la siguiente afirmación cierta?

$$\{\forall x \forall y R(x, y) \rightarrow R(y, x), \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z), \\ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z\} \models \forall x \forall y R(x, y) \rightarrow x = y$$

Demuestre o de un contraejemplo.

3. Demuestre que $\{\forall x (f(g(x)) = x)\} \not\models \forall x (g(f(x)) = x)$.

4. Demuestre que:

$$\left\{ \forall x (s(x) \neq 0), \forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y), \right. \\ \left. \forall x (x + 0 = x), \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y)) \right\} \not\models \forall x \forall y (x + y = y + x)$$

5. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$. Demuestre que existe un conjunto infinito de $\mathcal{L}$ -oraciones $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \neq k$, se tiene que $\varphi_j \not\equiv \varphi_k$.

6. Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es un símbolo de relación binaria. Construya una $\mathcal{L}$ -oración Φ tal que Φ es satisfacible y para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$:

si $\mathfrak{A} \models \Phi$, entonces el dominio de $\mathfrak{A}$ es infinito.

7. Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es un símbolo de relación binaria. Decimos que una $\mathcal{L}$ -oración φ es *existencial* si $\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_k \psi$, donde ψ es una $\mathcal{L}$ -fórmula sin cuantificadores.

- (a) Sea φ una $\mathcal{L}$ -oración existencial. Demuestre que si φ es satisfacible, entonces existe una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{A}$ tiene un dominio finito.

- (b) Utilizando (a) y el ejercicio 6, demuestre que existe una $\mathcal{L}$ -oración ψ tal que para toda $\mathcal{L}$ -oración existencial φ , se tiene que $\psi \not\models \varphi$.
8. Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es una relación binaria. Construya una $\mathcal{L}$ -oración Φ tal que:
- para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A tal que A es finito, $|A| \geq n$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$; y
 - para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A , si $\mathfrak{A} \models \Phi$ y A es finito, entonces A tiene un número par de elementos.
9. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, y sea Σ un conjunto formado por las siguientes $\mathcal{L}$ -oraciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x \neg(x < x) \\ \varphi_2 &= \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\ \varphi_3 &= \forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y).\end{aligned}$$

Conteste las siguientes preguntas.

- (a) Construya una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_1$ tal que $\mathfrak{A}_1 \models \Sigma$.
- (b) Construya una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_2$ tal que $\mathfrak{A}_2 \models \Sigma \cup \{\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$, donde:

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= \forall x \exists y (x < y) \\ \varphi_5 &= \forall x \exists y (y < x) \\ \varphi_6 &= \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).\end{aligned}$$

- (c) Construya una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_3$ tal que $\mathfrak{A}_3 \models \Sigma \cup \{\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8\}$, donde φ_6 es la $\mathcal{L}$ -oración definida en (b) y:

$$\begin{aligned}\varphi_7 &= \exists x \forall y (y < x \vee y = x) \\ \varphi_8 &= \exists x \forall y (x < y \vee y = x)\end{aligned}$$

- (d) Construya una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_4$ tal que $\mathfrak{A}_4 \models \Sigma \cup \{\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9\}$, donde φ_7 y φ_8 son las $\mathcal{L}$ -oraciones definidas en (c) y:

$$\varphi_9 = \forall x (\exists y (x < y) \rightarrow \exists z (x < z \wedge \neg \exists w (x < w \wedge w < z))).$$

10. Demuestre que ninguna de las siguientes oraciones es implicada por las otras dos:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z)) &\rightarrow R(x, z) \\ \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x)) &\rightarrow x = y \\ \forall x \exists y R(x, y) &\rightarrow \exists y \forall x R(x, y)\end{aligned}$$

11. Demuestre que la siguiente oración es válida:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge P(x_1, x_2)) \rightarrow P(y_1, y_2)$$

12. Una fórmula φ en lógica de primer orden está en Forma Normal Prenex (FNP) si:

$$\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k \psi,$$

donde $Q_i = \exists$ o $Q_i = \forall$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, y ψ es una fórmula sin cuantificadores. Por ejemplo, la fórmula $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg T(y, x, z))$ está en FNP, mientras que la fórmula $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$ no lo está.

Sea Φ la oración:

$$\neg \left[\left(\left(\exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg S(y, x)) \right) \wedge \left(\forall x ((\exists y R(x, y)) \rightarrow (\exists y S(x, y))) \right) \right) \leftrightarrow \left(\forall x \exists z (R(x, z) \vee \forall y (S(x, y) \wedge R(z, y))) \right) \right].$$

Construya una oración Ψ en FNP que sea equivalente a Φ .

13. Demuestre que toda fórmula en lógica de primer orden es equivalente a una fórmula en FNP.
14. Dado un grafo $G = (N, A)$, una secuencia de nodos $(a_1, \dots, a_n)$ es un *camino en G* si para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in A$. Además, decimos que una camino $(a_1, \dots, a_n)$ va desde b a c si $a_1 = b$ y $a_n = c$, y decimos que el largo de $(a_1, \dots, a_n)$ es $n-1$. Finalmente, decimos que la distancia en G entre dos nodos b y c es k si existe un camino de b a c en G de largo k , y no existe un camino más corto en G desde b a c .

Suponga que utiliza el lenguaje $\mathcal{L} = \{E\}$ para representar grafos, donde E es una relación binaria. Dado un número natural k , defina una $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi_k(x, y)$ tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y elementos a, b en el dominio de $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_k(a, b) \text{ si y sólo si la distancia entre } a \text{ y } b \text{ en el grafo representado por } \mathfrak{A} \text{ es } k.$$

15. Suponga que utiliza el lenguaje $\mathcal{L} = \{E\}$ para representar grafos, donde E es una relación binaria. Dada una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$, describa en palabras para qué pares de elementos a, b en el dominio de $\mathfrak{A}$ se satisface la siguiente $\mathcal{L}$ -fórmula:

$$\varphi(x, y) = \exists z (E(x, z) \wedge \exists x (x = z \wedge \exists z (E(x, z) \wedge \exists x (x = z \wedge E(x, y))))))$$

16. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario arbitrario. Un conjunto Σ de $\mathcal{L}$ -oraciones es *completo* si para cada $\mathcal{L}$ -oración φ se tiene que $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \neg \varphi$. Además, un par $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ de $\mathcal{L}$ -estructuras son *elementalmente equivalentes* si para cada $\mathcal{L}$ -oración φ se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Suponga que Σ es un conjunto consistente de $\mathcal{L}$ -oraciones. Demuestre que Σ es completo si y sólo si para cada par $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ de $\mathcal{L}$ -estructuras que satisfacen Σ , se tiene que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes.

17. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario arbitrario, y Φ una $\mathcal{L}$ -oración arbitraria. Demuestre que existe una $\mathcal{L}$ -oración Ψ tal que:

- las variables mencionadas en Ψ son x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 (vale decir, $V(\Psi) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$); y
- para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ cuyo dominio tiene 4 elementos, se tiene que $\mathfrak{A} \models \Phi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \Psi$.

18. Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y un conjunto $S \subseteq A$, decimos que S es definible en $\mathfrak{A}$ si existe una $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi(x)$ tal que:

$$S = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}$$

Suponga que $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$, donde $+, \cdot$ son símbolos de funciones binarias, y suponga que $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}$ son las funciones de suma y multiplicación sobre los números reales.

- (a) Demuestre que $\{0\}$ y $\{1\}$ son definibles en $\mathfrak{A}$.
 - (b) Demuestre que $\{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.
 - (c) Sea n un número natural arbitrario. Demuestre que $\{n\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.
 - (d) Sea n un número entero arbitrario. Demuestre que $\{n\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.
 - (e) Sea r un número racional arbitrario. Demuestre que $\{r\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.
19. Considere la definición de definibilidad dada en la pregunta anterior. Suponga que $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$, donde $+, \cdot$ son símbolos de funciones binarias, y suponga que $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}$ son las funciones de suma y multiplicación sobre los números naturales. En esta pregunta, usted debe demostrar que el conjunto

$$S = \{a \in \mathbb{N} \mid \text{existe un número primo } p \text{ y un número } b \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^b = a\}$$

es definible en $\mathfrak{A}$.

20. Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y un conjunto $S \subseteq A^k$, donde $k \geq 1$, decimos que S es definible en $\mathfrak{A}$ si existe una $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ tal que:

$$S = \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)\}$$

Suponga que $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$, donde $+, \cdot$ son símbolos de funciones binarias, y suponga que $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}$ son las funciones de suma y multiplicación sobre los números naturales.

- (a) Demuestre que $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ menor que } b\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.
- (b) Demuestre que $\{(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \equiv b \pmod{c}\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.
- (c) Demuestre que $\{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es primo}\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.
- (d) Demuestre que $\{a \in \mathbb{N} \mid \text{existe } b \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = 2^b\}$ es definible en $\mathfrak{A}$.