

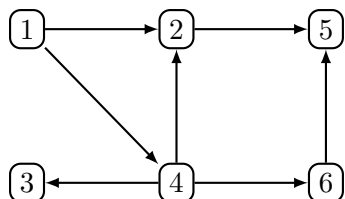


Matemáticas Discretas - IIC1253

Guía 2

Relaciones y cardinalidad

1. Determine todos los ordenes topológicos para el siguiente grafo:



2. ¿Cuántas relaciones de equivalencia existen sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$?
3. Demuestre que para cada conjunto A , existe una relación de equivalencia $\sim$ sobre A tal que $A/\sim$ es un conjunto finito.
4. Sea A un conjunto. Demuestre que existen relaciones de equivalencia $\sim_1$ y $\sim_2$ sobre A tales que para toda relación de equivalencia $\sim$ sobre A , se tiene que $\sim_1 \subseteq \sim \subseteq \sim_2$ (vale decir, para todo $(a, b) \in A \times A$, si $a \sim_1 b$, entonces $a \sim b$, y si $a \sim b$, entonces $a \sim_2 b$).
5. Defina una relación $\preceq$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente forma. Para cada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) \preceq (c, d)$ si y sólo si $(a < c)$ o $(a = c \text{ y } b \leq d)$, donde $<$ es el orden usual de los números naturales. Demuestre que $\preceq$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
6. Generalice la definición de la relación $\preceq$ en el ejercicio 5 para el caso de $\mathbb{N}^k$, donde $k \geq 3$. Demuestre que la relación resultante es un orden total sobre $\mathbb{N}^k$.
7. Demuestre que la relación $\approx$ (ser equinumeroso) es una relación de equivalencia.
8. Sea n un número natural mayor o igual a 2, y sea $A = \{1, \dots, n\}$. Demuestre que el número de relaciones de equivalencia sobre A es estrictamente menor que el número de órdenes parciales sobre A .
9. Sean A, B, C, D conjuntos infinitos tales que $A \cap B = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$, $A \approx C$ y $B \approx D$. Demuestre que $(A \cup B) \approx (C \cup D)$.
10. Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Demuestre que si $A \approx C$, entonces $B \approx C$.

11. Sean A, B conjuntos infinitos. Demuestre que existen conjuntos C, D tales que $A \approx C, B \approx D$ y $C \cap D = \emptyset$.
12. Sean A, B conjuntos enumerables. Demuestre que $A \cup B$ es enumerable.
13. Sea $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos tal que cada A_i ($i \in \mathbb{N}$) es enumerable. Demuestre que el siguiente conjunto es enumerable:

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

14. Demuestre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable, vale decir, construya una biyección $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Sea A un conjunto, $\preceq$ un orden total sobre A y $B \subseteq A$. En los ejercicios 15 - 18, decimos que una función $f : B \rightarrow A$ es monótona decreciente si para cada $a, b \in B$ tal que $a \preceq b$, se tiene que $f(b) \preceq f(a)$. Además en estos ejercicios sólo consideramos funciones $f : B \rightarrow A$ totales, es decir, suponemos que f está definida para cada $a \in B$.

15. Considere el conjunto $\mathbb{N}$ con el orden total $\leq$ usual, y defina $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ es una función monótona decreciente}\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un conjunto enumerable.
16. Considere el conjunto $\mathbb{Z}$ con el orden total $\leq$ usual, y defina $\mathcal{G} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ es una función monótona decreciente}\}$. Demuestre que $\mathcal{G}$ no es un conjunto enumerable.
17. Sean A, B, C, D conjuntos infinitos tales que $A \approx C$ y $B \approx D$. Demuestre que los siguientes conjuntos son equinumerosos:

$$\{f \mid f : A \rightarrow B \text{ es una función}\} \quad \text{y} \quad \{g \mid g : C \rightarrow D \text{ es una función}\}$$

18. Suponga que A es un conjunto enumerable tal que $\mathbb{N} \subseteq A$. Además, suponga que $\preceq$ es un orden total para A tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \preceq m$ si sólo si $n \leq m$, donde $\leq$ es el orden usual para los números naturales. Finalmente, suponga que A tiene un menor elemento bajo $\preceq$, vale decir, existe $a \in A$ tal que para todo $b \in A$ se tiene que $a \preceq b$ (por ejemplo, $\mathbb{N}$ con el orden usual tiene un menor elemento, mientras que $\mathbb{Z}$ con el orden usual no lo tiene).

Considere el conjunto A con el orden total $\preceq$, y defina $\mathcal{H} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow A \text{ es una función monótona decreciente}\}$. ¿Es $\mathcal{H}$ un conjunto enumerable? Justifique su respuesta.

19. Sea $\{0, 1\}^\omega$ el conjunto de los strings infinitos de la forma $a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$, donde cada a_i ($i \in \mathbb{N}$) es 0 ó 1. Demuestre que $\{0, 1\}^\omega$ es equinumeroso con $2^\mathbb{N}$.
20. Sea $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es infinito y } (\mathbb{N} \setminus A) \text{ es infinito}\}$. Por ejemplo, el conjunto P de los números pares está en $\mathcal{I}$, ya que P es infinito y su complemento $(\mathbb{N} \setminus P)$, los números impares, también es infinito. Demuestre que $\mathcal{I}$ y $2^\mathbb{N}$ son equinumerosos.
21. Sea $\mathcal{T} = \{R \mid R \text{ es un orden total sobre } \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{T}$ y $2^\mathbb{N}$ son equinumerosos.
22. Sea $\mathcal{E} = \{\sim \mid \sim \text{ es una relación de equivalencia sobre } \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{E}$ y $2^\mathbb{N}$ son equinumerosos.

23. Demuestre que los siguientes conjuntos de números reales son equinumerosos: $[0, 1]$ y $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
24. Demuestre que $\mathbb{R}$ es equinumeroso con $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.