



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253

Guía 1

Inducción y lógica proposicional

1. Demuestre que para todo número natural $n \geq 4$, se tiene que $2^n < n!$.
2. La función de Fibonacci se define de la siguiente forma:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Así, por ejemplo, se tiene que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Demuestre que para todo número natural n , se tiene que $F(n)$ es par si y sólo si n es divisible por 3.

3. Suponga que $F(n)$ es la función de Fibonacci definida en la pregunta anterior. Demuestre que para todo número natural n , se tiene que $F(n) \leq 2^n - 1$.
4. Demuestre que para todo número natural $n \geq 4$, existen números naturales k y ℓ tales que $n = k \cdot 2 + \ell \cdot 5$. Por ejemplo, tenemos que $k = 3$ y $\ell = 1$ para el número 11, puesto que $11 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5$.
5. Demuestre que para todo número natural $n \geq 14$, existen números naturales k y ℓ tales que $n = k \cdot 3 + \ell \cdot 8$.
6. Dado un alfabeto Σ , sea $\text{PALPAR}(\Sigma)$ el conjunto de todos los strings sobre Σ que son palíndromos de largo par.
 - (a) Defina $\text{PALPAR}(\Sigma)$ como para el caso de $\mathbb{N}$, y deduzca un principio de inducción a partir de su definición.
 - (b) Usando el principio de inducción definido en la pregunta anterior, demuestre que para todo $w \in \text{PALPAR}(\Sigma)$, se tiene que $w = \varepsilon$ o w tiene dos posiciones consecutivas con el mismo símbolo de Σ .
7. Dado un alfabeto Σ , sea $\text{PALNC}(\Sigma)$ el conjunto de todos los strings sobre Σ que son palíndromos y que no tienen dos posiciones consecutivas con el mismo símbolo de Σ . Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces 010 y 10101 son elementos de $\text{PALNC}(\Sigma)$, mientras que 1001 y 00100 no lo son.

Defina $\text{PALNC}(\Sigma)$ como en el ejercicio anterior, y deduzca un principio de inducción a partir de su definición.
8. Dada una fórmula φ , la lista de sub-fórmulas de φ se define como la lista de strings ψ tal que: ψ es una fórmula y ψ es un sub-string de φ . Por ejemplo, la siguiente es la lista de sub-fórmulas de

$((p \vee q) \rightarrow (p \wedge (\neg r)))$:

$((p \vee q) \rightarrow (p \wedge (\neg r)))$
 $(p \vee q)$
 p
 q
 $(p \wedge (\neg r))$
 p
 $(\neg r)$
 r

Defina de manera inductiva la función $\text{nsf}(\varphi)$ que retorna la cantidad de elementos en la lista de sub-fórmulas de φ . Por ejemplo, $\text{nsf}(((p \vee q) \rightarrow (p \wedge (\neg r)))) = 8$.

9. Defina $\text{la}(\alpha)$ como el largo de la fórmula proposicional α . Demuestre que para cada fórmula φ se tiene que $\text{nsf}(\varphi) \leq \text{la}(\varphi)$.
10. Demuestre usando inducción que para cada fórmula α en lógica proposicional, si β es un prefijo propio de α , entonces el número de paréntesis izquierdos de β es mayor que el número de paréntesis derechos de β .
11. Sea $P = \{p, q\}$. Defina el conjunto de números naturales LARGO de la siguiente forma:

$$\text{LARGO} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe una fórmula } \beta \in L(P) \text{ tal que } \text{la}(\beta) = n\}.$$

Demuestre que $\text{LARGO} = \{1, 4, 5\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 7\}$.

12. Formalice el siguiente argumento en el cálculo proposicional:

“Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe.”

Demuestre usando tablas de verdad que Superman no existe.

13. Sea EQ un conectivo ternario definido como $\text{EQ}(p, q, r) = 1$ si y sólo si $3 \cdot p - 2 \cdot (q + r) \geq 0$. Defina el conectivo EQ utilizando los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$.
14. Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

2	0	0
0	2	0
0	0	3

puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

2	2	1
2	2	1
1	1	3

de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

1	1	1
0	0	0
3	0	0

Dada una matriz C de 3×3 , construya una fórmula φ en lógica proposicional tal que C es completable si y sólo si φ es satisfacible. En particular, φ tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a φ represente una forma de completar C .

15. Sea φ la siguiente fórmula en lógica proposicional:

$$(p \rightarrow (\neg q)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \wedge (\neg r)))$$

Construya una fórmula ψ en CNF que sea equivalente a φ .

16. Decimos que una fórmula φ está en 3-CNF si φ está en CNF y cada una de sus cláusulas contiene a lo más tres literales. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s)$ está en 3-CNF mientras que $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee s)$ no está en 3-CNF.

Demuestre que existen fórmulas que no son equivalentes a ninguna fórmula en 3-CNF.

17. Decimos que una fórmula φ está en k -CNF ($k \geq 2$) si φ está en CNF y cada una de sus cláusulas contiene a lo más k literales. ¿Existe algún valor de k para el cual toda fórmula es equivalente a una fórmula en k -CNF?

18. En esta pregunta usted va a demostrar que existen fórmulas proposicionales para las cuales toda fórmula equivalente en DNF es de tamaño exponencial.

Suponga que $n \geq 1$ es un número fijo. Defina $P_n = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ como un conjunto compuesto de $2 \cdot n$ variables proposicionales distintas, y defina φ_n de la manera siguiente:

$$\varphi_n = (x_1 \vee y_1) \wedge \dots \wedge (x_n \vee y_n).$$

Además, suponga que ψ_n es la fórmula en DNF más corta tal que $\varphi_n \equiv \psi_n$. Vale decir, para toda fórmula θ_n en DNF tal que $\varphi_n \equiv \theta_n$, se tiene que $\text{la}(\psi_n) \leq \text{la}(\theta_n)$. En el resto de esta pregunta usted va a demostrar que $\text{la}(\psi_n) \geq 2^n$, es decir, en esta pregunta usted va a demostrar que el largo de ψ_n es exponencial en el largo de φ_n , dado que $\text{la}(\varphi_n) = 6 \cdot n - 1$.

Defina Γ_n como el siguiente conjunto de asignaciones:

$$\Gamma_n = \{\sigma : P_n \rightarrow \{0, 1\} \mid \text{para cada } i \in \{1, \dots, n\} \text{ se tiene que } (\sigma(x_i) = 1 \text{ o } \sigma(y_i) = 1) \text{ y } (\sigma(x_i) = 0 \text{ o } \sigma(y_i) = 0)\}.$$

Vale decir, Γ_n es el conjunto de valuaciones σ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que σ asigna el valor 1 a x_i o a y_i , pero no a ambos. Nótese que cada valuación en Γ_n satisface a φ_n , y este conjunto está compuesto por 2^n asignaciones. Además, suponga que $\psi_n = (D_1 \vee \dots \vee D_\ell)$, donde cada D_i ($1 \leq i \leq \ell$) es una conjunción de literales, y suponga que $f : \Gamma_n \rightarrow \{1, \dots, \ell\}$ es una función tal que para cada $\sigma \in \Gamma_n$ se tiene que $\sigma(D_{f(\sigma)}) = 1$. Nótese que esta función f existe ya que para cada $\sigma \in \Gamma_n$ se tiene que $\sigma(\psi_n) = 1$ (dado que $\sigma(\varphi_n) = 1$ y $\varphi_n \equiv \psi_n$). En el resto de esta pregunta usted va a demostrar que f es una función inyectiva, de lo cual se concluye en primer lugar que $\ell \geq |\Gamma_n|$, y en segundo lugar que $\text{la}(\psi_n) \geq 2^n$ ya que $\text{la}(\psi_n) \geq \ell$ y $|\Gamma_n| = 2^n$.

- (a) Sea $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Demuestre que D_i es una fórmula consistente (vale decir, no tiene literales complementarios).

- (b) Sea $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Demuestre que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que x_j es uno de los literales mencionados en D_i (vale decir, D_i es de la forma $\alpha \wedge x_j \wedge \beta$) o y_j es uno de los literales mencionados en D_i (o ambos son mencionados, no se pide en esta parte demostrar que sólo uno de los dos es mencionado).
- (c) Suponga que la función f no es inyectiva, vale decir, suponga que existen $\sigma_1 \in \Gamma_n$ y $\sigma_2 \in \Gamma_n$ tales que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ y $f(\sigma_1) = f(\sigma_2) = i$. Obtenga una contradicción utilizando (b) y los siguientes hechos: $\sigma_1 \in \Gamma_n$, $\sigma_2 \in \Gamma_n$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_1(D_i) = 1$ y $\sigma_2(D_i) = 1$.
19. Una *cláusula de Horn* es una cláusula que tiene a lo más un literal positivo. Por ejemplo $\neg p$, $(\neg p \vee \neg q)$ y $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s)$ son todas cláusulas de Horn, mientras que $(p \vee q \vee \neg r)$ no es una cláusula de Horn porque tiene dos literales positivos. Demuestre que existe una fórmula que no es equivalente a ningún conjunto de cláusulas de Horn.
20. Sea $n \geq 1$ y $x_1, \dots, x_n$ una secuencia de n variables proposicionales distintas. Además, para cada valuación σ , sea $\Phi_{n,\sigma}$ la siguiente fórmula proposicional:

$$\left(\bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(x_i) = 1} x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in \{1, \dots, n\} : \sigma(x_j) = 0} \neg x_j \right).$$

Por ejemplo, si $n = 4$, $\sigma(x_1) = \sigma(x_4) = 1$ y $\sigma(x_2) = \sigma(x_3) = 0$, entonces $\Phi_{n,\sigma}$ es la fórmula $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$. Finalmente, dada una valuación σ , defina $\#_n(\sigma)$ como la cardinalidad del conjunto $\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(x_i) = 1\}$, vale decir, como el número de símbolos 1 mencionado en la secuencia $\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)$. Por ejemplo, si $n = 5$, $\sigma(x_1) = \sigma(x_4) = 0$ y $\sigma(x_2) = \sigma(x_3) = \sigma(x_5) = 1$, entonces se tiene que $\#_n(\sigma) = 3$.

En esta pregunta usted debe construir una fórmula proposicional Ψ_n tal que para toda valuación σ se tiene que: $(\Phi_{n,\sigma} \wedge \Psi_n)$ es satisfacible si y sólo si $\#_n(\sigma)$ es un número par. Además, la fórmula Ψ_n debe ser de tamaño polinomial en n , vale decir, debe existir un polinomio p tal que $\text{la}(\Psi_n) \leq p(n)$, donde $\text{la}(\alpha)$ es el largo de una fórmula α .

21. Sea $G = (N, A)$ un grafo. Un camino en G es una secuencia $a_1, \dots, a_k$ de elementos en N tal que $k \geq 2$ y $(a_i, a_{i+1}) \in A$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Además, dados elementos $b, c \in N$, un camino $a_1, \dots, a_k$ en G va desde b a c si $a_1 = b$ y $a_k = c$. Finalmente, un camino $a_1, \dots, a_k$ en G se dice simple si $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $i \neq j$, y el largo de $a_1, \dots, a_k$ es $k-1$.

En las siguientes preguntas, suponga que $G = (N, A)$ es un grafo donde $N = \{1, \dots, n\}$ y $n \geq 2$.

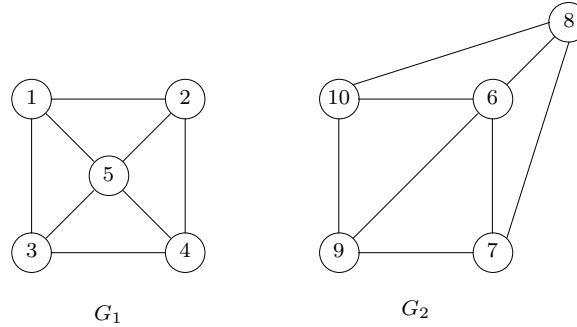
- (a) Construya una fórmula proposicional φ tal que: φ es satisfacible si y sólo si existe un camino en G desde 1 a n .
- (b) Construya una fórmula proposicional ψ tal que: ψ es satisfacible si y sólo si existe un camino simple en G desde 1 a n .
- (c) Construya una fórmula proposicional θ tal que: θ es satisfacible si y sólo si existe un camino simple en G desde 1 a n de largo par.

El tamaño de las formulas construidas en (a), (b) y (c) debe ser polinomial en n , vale decir, deben existir polinomios p, q y r tales que $\text{la}(\varphi) \leq p(n)$, $\text{la}(\psi) \leq q(n)$ y $\text{la}(\theta) \leq r(n)$.

En los ejercicios 22 - 29 decimos que un algoritmo es eficiente si el número de pasos ejecutado por el algoritmo es n^c cuando la entrada tiene largo n , donde c es una constante. Por ejemplo, un algoritmo que funciona en tiempo n^2 es eficiente mientras que un algoritmo que funciona en tiempo 2^n no lo es.

22. Encuentre un algoritmo eficiente que dada una fórmula φ en CNF construya una fórmula ψ en 3-CNF tal que φ es satisfacible si y sólo si ψ es satisfacible.
23. Encuentre un algoritmo eficiente que verifique si una fórmula en DNF es satisfacible.

24. Encuentre un algoritmo eficiente que verifique si una fórmula en CNF es una tautología.
25. Sea $k \geq 2$ un número natural fijo. Un grafo no dirigido $G = (N, A)$ es k -coloreable si existe una función $f : N \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que para cada $(a, b) \in A$ se tiene que $f(a) \neq f(b)$.
Encuentre un algoritmo eficiente que dado un grafo G , construya una fórmula φ tal que G es k -coloreable si y sólo si φ es satisfacible.
26. Suponga que existe un algoritmo eficiente para el problema de satisfacibilidad, es decir, un algoritmo que dada una fórmula φ con n letras proposicionales, en n^c pasos retorna 1 si la fórmula es satisfacible y 0 en caso contrario, donde c es una constante fija.
Encuentre un algoritmo eficiente que dada una fórmula φ retorna una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$ si φ es satisfacible, y retorna 0 en caso contrario.
27. Decimos que dos grafos $G_1 = (N_1, A_1)$ y $G_2 = (N_2, A_2)$ son *isomorfos* si existe una biyección $f : N_1 \rightarrow N_2$ tal que para todo a y b en A_1 se tiene que $(a, b) \in A_1$ si y sólo si $(f(a), f(b)) \in A_2$. Por ejemplo, los siguientes grafos son isomorfos:



- Encuentre un algoritmo eficiente que dados dos grafos G_1 y G_2 construya una fórmula φ tal que G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si φ es satisfacible. Estime el número de pasos de su algoritmo cuando G_1 tiene n_1 nodos y m_1 arcos, y G_2 tiene n_2 nodos y m_2 arcos.
28. Dados dos grafos $G_1 = (N_1, A_1)$ y $G_2 = (N_2, A_2)$, una función $h : N_1 \rightarrow N_2$ se dice un homomorfismo de G_1 en G_2 si para todo $(a, b) \in A_1$, se tiene que $(h(a), h(b)) \in A_2$. Además, h se dice un homomorfismo propio de G_1 en G_2 si h es un homomorfismo de G_1 en G_2 y h no es una función sobre (vale decir, existe un nodo en G_2 que no es la imagen bajo h de ningún nodo en G_1). Finalmente, un grafo G se dice non-lean si existe un homomorfismo propio de G en G .
Encuentre un algoritmo eficiente que dado un grafo G , construya una fórmula φ tal que G es non-lean si y sólo si φ es satisfacible.
29. Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que G contiene un *circuito Hamiltoniano* si existe un camino $a_1, \dots, a_n$ en G tal que:
- n es el número de nodos de N ,
 - $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $i \neq j$,
 - $(a_n, a_1) \in A$.
- Encuentre un algoritmo eficiente que dado un grafo G , construya una fórmula proposicional φ tal que G contiene un circuito Hamiltoniano si y sólo si φ es satisfacible.
30. El *principio de los cajones* establece que si $n+1$ objetos son distribuidos en n cajones, entonces al menos habrá un cajón con más de un objeto. Demuestre el principio para $n = 3$ usando cálculo proposicional.

31. Demuestre que las siguientes fórmulas son tautologías:

$$\begin{aligned}\varphi &\rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (\varphi &\rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)) \\ (\neg\varphi &\rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)\end{aligned}$$

32. El conectivo lógico **NOR** es definido de la siguiente forma:

p	q	$p \text{ NOR } q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Demuestre que **NOR** es funcionalmente completo.

33. El conectivo lógico **NAND** es definido de la siguiente forma:

p	q	$p \text{ NAND } q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Demuestre que **NAND** es funcionalmente completo.

34. El conectivo ternario **MAYORIA** es definido de la siguiente forma:

p	q	r	$\text{MAYORIA}(p, q, r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Demuestre que **MAYORIA** no es funcionalmente completo.

35. ¿Es $\{\neg, \text{MAYORIA}\}$ funcionalmente completo?

36. El conectivo unario $\perp$ es definido de la siguiente forma:

p	$\perp p$
0	0
1	0

Este conectivo usualmente se denota sin la letra proposicional porque su valor de verdad es siempre 0 (por ejemplo, denotamos $p \wedge (\perp q)$ como $p \wedge \perp$).

Demuestre que $\{\neg, \text{MAYORIA}, \perp\}$ es funcionalmente completo.

37. El conectivo unario $\top$ es definido de la siguiente forma:

p	$\top p$
0	1
1	1

¿Es $\{\wedge, \perp, \top\}$ funcionalmente completo?

38. ¿Es $\{\rightarrow, \perp\}$ funcionalmente completo?

39. El conectivo ternario M es definido de la siguiente forma:

p	q	r	$M(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

¿Es M funcionalmente completo?

40. Dado $n \geq 1$, sea IMPAR_n un conectivo n -ario definido de la siguiente forma. Dada una valuación σ para las variables $x_1, \dots, x_n$, se tiene que $\sigma(\text{IMPAR}_n(x_1, \dots, x_n)) = 1$ si y sólo si $\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(x_i) = 1\}$ es un conjunto con una cantidad impar de elementos. Por ejemplo, la siguiente es la tabla de verdad para $n = 3$:

x_1	x_2	x_3	$\text{IMPAR}_3(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Demuestre que el conjunto (infinito) de conectivos $\{\text{IMPAR}_n \mid n \geq 1\}$ no es funcionalmente completo.

41. Sea Σ un conjunto satisfacible de fórmulas proposicionales, y φ una fórmula proposicional que no es una tautología. Además, suponga que Σ y φ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \not\models \varphi$? Demuestre o de un contraejemplo.

42. Dado $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\alpha, \beta \in L(P)$, demuestre que $\Sigma \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

43. Dado $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\alpha, \beta \in L(P)$, demuestre que si α es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \models \beta$.

44. Dado $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\varphi, \psi, \theta \in L(P)$, demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.

45. Dado $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\alpha, \beta \in L(P)$ tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$?

46. Un conjunto Σ de fórmulas proposicionales se dice *redundante* si existe una fórmula $\varphi \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Además, Σ se dice *fuertemente redundante*, si para cada $\Sigma' \subseteq \Sigma$ tal que Σ y Σ' son equivalentes, se tiene que Σ' es redundante. Construya un conjunto de fórmulas que sea fuertemente redundante.