

Relaciones

IIC1253

Relaciones binarias

Dado: conjunto A

R es una relación binaria sobre A si $R \subseteq A \times A$.

- Para indicar que $a, b \in A$ están relacionados a través de R usamos las notaciones: $R(a, b)$ y aRb

Ejemplo

Si $A = \mathbb{N}$, las siguientes son relaciones binarias sobre A :

$$R_1 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = j\}$$

$$R_2 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j\}$$

En este capítulo sólo vamos a considerar relaciones binarias, usamos el termino relación para referirnos a ellas.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Refleja:** Para cada $a \in A$, se tiene $R(a, a)$
- ▶ **Irrefleja:** Para cada $a \in A$, no se tiene $R(a, a)$

Ejercicio

De ejemplos de relaciones reflejas e irreflejas sobre $\mathbb{N}$.

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Simétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$
- ▶ **Asimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto $R(b, a)$
- ▶ **Antisimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$

Ejercicio

De ejemplos de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas sobre $\mathbb{N}$.

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Transitiva:** Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$
- ▶ **Conexa:** Para cada $a, b \in A$, se tiene $R(a, b)$ o $R(b, a)$

Ejercicio

De ejemplos de relaciones transitivas y conexas sobre $\mathbb{N}$.

1. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.
2. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.
3. De una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre $\mathbb{N}$.
4. De un conjunto A y una relación R sobre A tal que R sea refleja, antisimétrica, transitiva y no conexa.

Definición

Una relación R sobre A es una relación de equivalencia si R es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplo

Sea $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\sim$ una relación definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Definición

Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $b \in A$, la clase de equivalencia de b bajo R se define como:

$$[b]_R = \{c \in A \mid R(b, c)\}$$

Ejercicio

Suponga que $\sim$ es definida como en la transparencia anterior. Para cada $(a, b) \in A$, ¿que representa $[(a, b)]_{\sim}$?

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .
 - ▶ Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia
 - ▶ Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?
2. Sea $\sim$ una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A . Demuestre que:
 - ▶ Para cada $a \in A$: $[a]_{\sim} \neq \emptyset$
 - ▶ Para cada $a, b \in A$: si $a \sim b$, entonces $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$
 - ▶ Para cada $a, b \in A$: si es falso que $a \sim b$, entonces $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto A

Conjunto cociente de A dado $\sim$:

$$A/\sim = \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$$

Un conjunto cociente agrupa los elementos indistinguibles

- Algunos conjuntos fundamentales son definidos usando esta noción: $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Un primer ejemplo: $\mathbb{Z}$

Sea $\sim$ una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

Definimos $\mathbb{Z} = \{[(a, b)]_{\sim} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Para $n \in \mathbb{N}$:

- ▶ n es representado por $[(n, 0)]_{\sim}$
- ▶ $-n$ es representado por $[(0, n)]_{\sim}$

Primero vamos a definir la suma sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_{\sim} + [(c, d)]_{\sim} = [(a + c, b + d)]_{\sim}$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} + [(c_1, d_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim} + [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Ejercicio

Demuestre que la suma está bien definida.

Ahora vamos a definir la multiplicación sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_{\sim} \cdot [(c, d)]_{\sim} = [(ac + bd, ad + bc)]_{\sim}$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- ▶ Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} \cdot [(c_1, d_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim} \cdot [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Ejercicio

Demuestre que la multiplicación está bien definida.

Concluimos definiendo la relación $<$ para $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_{\sim} < [(c, d)]_{\sim} \quad \text{si y sólo si} \quad a + d < c + b$$

Tenemos que demostrar que esta relación está bien definida:

- Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} < [(c_1, d_1)]_{\sim}$ si y sólo si $[(a_2, b_2)]_{\sim} < [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Ejercicio

Demuestre que $<$ está bien definida.

1. Defina $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ utilizando una relación de equivalencia y la noción de espacio cociente.
2. Defina las operaciones de suma y multiplicación para $\mathbb{Q}$, y demuestre que estas operaciones están bien definidas.

Índice de una relación de equivalencia

Dado: Una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto A

El índice de $\sim$ se define como $|\{[a]_{\sim} \mid a \in A\}|$

- ▶ Este índice se dice finito si $\{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$ es un conjunto finito, e infinito en otro caso

Ejercicio

Sea P un conjunto de variables proposicionales.

1. Demuestre que $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre $L(P)$.
2. Demuestre que el índice de $\equiv$ es finito si y sólo si P es un conjunto finito.

Ordenes parciales y totales

Dado: Relación R sobre un conjunto A

Definición

R es un *orden parcial* sobre A si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si R es además conexa, entonces es un *orden total* (u *orden lineal*) sobre A .

Ejercicio

De ejemplos de ordenes parciales y totales.

Ordenes topológicos

Sea $G = (N, E)$ un grafo.

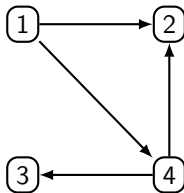
- ▶ Podemos considerar E como una relación sobre N

Una relación $\preceq$ sobre N se dice un **orden topológico** para G si:

- ▶ Para cada $(a, b) \in E$, se tiene que $a \preceq b$
- ▶ $\preceq$ es un orden total sobre N

Ordenes topológicos: Ejemplos

Sea G el siguiente grafo:



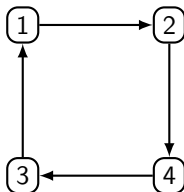
Los siguientes son ordenes topológicos para G :

$$1 \preceq 4 \preceq 2 \preceq 3$$

$$1 \preceq 4 \preceq 3 \preceq 2$$

Ordenes topológicos: Ejemplos

Sea G el siguiente grafo:



¿Existe un orden topológico en este caso? No

¿Cuándo existe un orden topológico? ¿Cómo podemos calcularlo?

- ¿Por qué es importante este problema?

Existencia de ordenes topológicos: Terminología

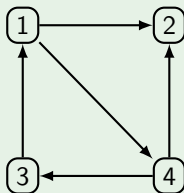
Dado: grafo $G = (N, E)$

Secuencia de nodos $(a_1, \dots, a_n)$ es un camino en G si:

para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$: $(a_i, a_{i+1}) \in E$

Ejemplo

$(1, 4, 2)$ y $(1, 4, 3, 1, 2)$ son caminos en el grafo:



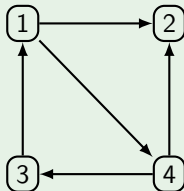
Existencia de ordenes topológicos: Terminología

Camino $(a_1, \dots, a_n)$ en G es simple si:

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$: $a_i \neq a_j$

Ejemplo

$(1, 4, 2)$ es un camino simple en el grafo:

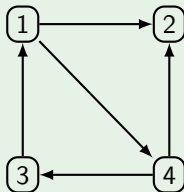


Existencia de ordenes topológicos: Terminología

Camino $(a_1, \dots, a_n)$ en G es un ciclo simple si $n \geq 3$, $(a_1, \dots, a_{n-1})$ es un camino simple y $a_1 = a_n$

Ejemplo

$(1, 4, 3, 1)$ es un ciclo simple en el grafo:



Un grafo es acíclico si **no** contiene un ciclo simple.

Existencia de ordenes topológicos

Teorema

Dado un grafo G , existe un orden topológico para G si y sólo si G es acíclico.

Ejercicio

Demuestre la dirección ($\Rightarrow$)

Para demostrar la dirección ($\Leftarrow$), vamos a dar un algoritmo para calcular un orden topológico para un grafo acíclico.

Cálculo de un orden topológico

Sea $G = (N, E)$ un grafo acíclico.

Comenzamos calculando:

$$C_0 = \{a \in N \mid \text{no existe } b \in N \text{ tal que } b \neq a \text{ y } (b, a) \in E\}$$

Tenemos que $C_0 \neq \emptyset$

► ¿Por qué?

Cálculo de un orden topológico

Si $N \neq C_0$, entonces calculamos:

$$C_1 = \{a \in (N \setminus C_0) \mid \text{si } (b, a) \in E \text{ y } b \neq a, \text{ entonces } b \in C_0\}$$

Tenemos que $C_1 \neq \emptyset$

► ¿Por qué?

Cálculo de un orden topológico

Supongamos que hemos calculado $C_0, C_1, \dots, C_k$ ($k \geq 1$)

► Sea $T_k = \bigcup_{i=0}^k C_i$

Si $N \neq T_k$, entonces calculamos:

$$C_{k+1} = \{a \in (N \setminus T_k) \mid \text{si } (b, a) \in E \text{ y } b \neq a, \text{ entonces } b \in T_k\}$$

Al igual que en los casos anteriores, tenemos que $C_{k+1} \neq \emptyset$

► ¿Por qué?

Cálculo de un orden topológico

El proceso continua hasta encontrar una secuencia $C_0, C_1, \dots, C_n$ tal que:

$$N = \bigcup_{i=0}^n C_i$$

Tenemos que n es menor o igual al número de nodos en N , ya que:

- ▶ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$: $C_i \neq \emptyset$
- ▶ para cada $i, j \in \{0, \dots, n\}$ con $i \neq j$: $C_i \cap C_j = \emptyset$

Cálculo de un orden topológico

Tenemos además que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y $a, b \in C_i$:

si $a \neq b$, entonces $(a, b) \notin E$

¿Por qué?

Entonces: para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, existe orden total $\preceq_i$ sobre C_i

- Extendemos estos ordenes totales para construir un orden total sobre N

Cálculo de un orden topológico

Para cada $a, b \in N$: $a \preceq b$ si y sólo si

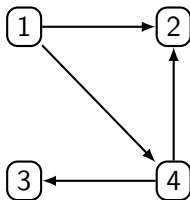
- ▶ existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $a, b \in C_i$ y $a \preceq_i b$, o
- ▶ existe $i, j \in \{0, \dots, n\}$ con $i < j$ tal que $a \in C_i$ y $b \in C_j$

Ejercicio

Demuestre que $\preceq$ es un orden total sobre N .

Cálculo de un orden topológico: Ejemplo

Sea G el siguiente grafo:



Tenemos que:

$$C_0 = \{1\}$$

$$C_1 = \{4\}$$

$$C_2 = \{2, 3\}$$

Cálculo de un orden topológico: Ejemplo

Ordenes totales para estos conjuntos:

$$\preceq_0 = \{(1, 1)\}$$

$$\preceq_1 = \{(4, 4)\}$$

$$\preceq_2 = \{(3, 3), (3, 2), (2, 2)\}$$

Entonces tenemos que:

$$\preceq = \preceq_0 \cup \preceq_1 \cup \preceq_2 \cup \{(1, 4), (1, 3), (1, 2), (4, 3), (4, 2)\}$$