

Lógica de Primer Orden

IIC1253

Lógica de primer orden

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- ▶ Poder modelar el proceso de razonamiento.
- ▶ Poder formalizar la noción de demostración.

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- ▶ Poder modelar el proceso de razonamiento.
- ▶ Poder formalizar la noción de demostración.

¿Podemos expresar el siguiente argumento en lógica proposicional?

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- ▶ Poder modelar el proceso de razonamiento.
- ▶ Poder formalizar la noción de demostración.

¿Podemos expresar el siguiente argumento en lógica proposicional?

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Podemos demostrar que para el conjunto de los números naturales es cierto que todo número es par o impar?

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado.

- ▶ ¿Por qué usamos esta lógica?

Vamos a introducir una lógica más expresiva.

- ▶ Tiene algunas de las buenas propiedades de la lógica proposicional, pero **no todas**.

Para expresar el argumento mostrado al principio necesitamos cuantificadores: **para todo** y **existe**.

Lógica de primer orden: Vocabulario

Una fórmula en lógica de primer orden está definida sobre algunas constantes, funciones y predicados.

Notación

Un vocabulario $\mathcal{L}$ es la unión de tres conjuntos:

<i>constantes</i>	:	$\{c_1, \dots, c_\ell, \dots\}$
<i>funciones</i>	:	$\{f_1, \dots, f_m, \dots\}$
<i>relaciones</i>	:	$\{R_1, \dots, R_n, \dots\}$

Lógica de primer orden: Vocabulario

Una fórmula en lógica de primer orden está definida sobre algunas constantes, funciones y predicados.

Notación

Un vocabulario $\mathcal{L}$ es la unión de tres conjuntos:

<i>constantes</i>	:	$\{c_1, \dots, c_\ell, \dots\}$
<i>funciones</i>	:	$\{f_1, \dots, f_m, \dots\}$
<i>relaciones</i>	:	$\{R_1, \dots, R_n, \dots\}$

Notación

La *aridad* de una función f (relación R) es el número de argumentos de f (de R).

- ▶ Cada función tiene una aridad mayor a 0
- ▶ Cada relación tiene una aridad mayor o igual a 0

Ejemplo

Para los números naturales $\mathcal{L}$ es la unión de

constantes	:	$\{0, 1\}$,
funciones	:	$\{s, +, \cdot\}$,
relaciones	:	$\{<\}$.

s es una función unaria, $+$ y $\cdot$ son funciones binarias y $<$ es una relación binaria.

Lógica de primer orden: Sintaxis

Las fórmulas de la lógica de primer orden se construyen usando:

- ▶ Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- ▶ Paréntesis: (y)
- ▶ Relación binaria =
- ▶ Variables
- ▶ Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$

Lógica de primer orden: Sintaxis

Las fórmulas de la lógica de primer orden se construyen usando:

- ▶ Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- ▶ Paréntesis: (y)
- ▶ Relación binaria =
- ▶ Variables
- ▶ Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$

Veamos algunos ejemplos, antes de introducir formalmente la sintaxis de la lógica de primer orden.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$.

► $1 = s(0)$

Para la igualdad usamos notación infija: No escribimos $= (1, s(0))$.

► $\forall x \, x < s(x)$

Usamos notación infija para funciones y relaciones comunes.

► $\forall x \exists y \, x = y + y$

► $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$

Sintaxis de la lógica de primer orden: Términos

Desde ahora en adelante: Suponemos dada una lista infinita de variables.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Términos

Desde ahora en adelante: Suponemos dada una lista infinita de variables.

Definición

El conjunto de $\mathcal{L}$ -términos es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- ▶ *Cada constante c en $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$ -término.*
- ▶ *Cada variable x es un $\mathcal{L}$ -término.*
- ▶ *Si $t_1, \dots, t_n$ son $\mathcal{L}$ -términos y f es una función n -aria en $\mathcal{L}$, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un $\mathcal{L}$ -término.*

Sintaxis de la lógica de primer orden: Términos

Desde ahora en adelante: Suponemos dada una lista infinita de variables.

Definición

El conjunto de $\mathcal{L}$ -términos es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Cada constante c en $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$ -término.
- ▶ Cada variable x es un $\mathcal{L}$ -término.
- ▶ Si $t_1, \dots, t_n$ son $\mathcal{L}$ -términos y f es una función n -aria en $\mathcal{L}$, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un $\mathcal{L}$ -término.

Ejemplos

0 , $s(s(s(1)))$ y $s(0) \cdot s(x)$

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

Definición

El conjunto de $\mathcal{L}$ -fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$ -términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$ -fórmula.
- ▶ Si $t_1, \dots, t_n$ son $\mathcal{L}$ -términos y R es una relación n -aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \dots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$ -fórmula.
- ▶ Si φ y ψ son $\mathcal{L}$ -fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$ -fórmulas.
- ▶ Si φ es una $\mathcal{L}$ -fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x \varphi)$ y $(\forall x \varphi)$ son $\mathcal{L}$ -fórmulas.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

Definición

El conjunto de $\mathcal{L}$ -fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$ -términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$ -fórmula.
- ▶ Si $t_1, \dots, t_n$ son $\mathcal{L}$ -términos y R es una relación n -aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \dots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$ -fórmula.
- ▶ Si φ y ψ son $\mathcal{L}$ -fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$ -fórmulas.
- ▶ Si φ es una $\mathcal{L}$ -fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x \varphi)$ y $(\forall x \varphi)$ son $\mathcal{L}$ -fórmulas.

Notación

$t_1 = t_2$ y $R(t_1, \dots, t_n)$ son llamadas *fórmulas atómicas*.

Definiciones inductivas

Al igual que en el caso de la lógica proposicional, podemos definir funciones de manera inductiva.

Definiciones inductivas

Al igual que en el caso de la lógica proposicional, podemos definir funciones de manera inductiva.

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, queremos definir una función la que indica cuantos símbolos tiene una $\mathcal{L}$ -fórmula: $la((\exists x (R(x, x) \wedge x = f(y)))) = 19$

Definiciones inductivas

Al igual que en el caso de la lógica proposicional, podemos definir funciones de manera inductiva.

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, queremos definir una función la que indica cuantos símbolos tiene una $\mathcal{L}$ -fórmula: $la((\exists x (R(x, x) \wedge x = f(y)))) = 19$

En primer lugar, definimos esta función para los $\mathcal{L}$ -términos:

Caso base : para cada constante $c \in \mathcal{L}$, $la(c) = 1$
: para cada variable x , $la(x) = 1$

Caso inductivo : $la(f(t_1, \dots, t_n)) = 3 + (n - 1) + \sum_{i=1}^n la(t_i)$

Definiciones inductivas

En segundo lugar, definimos esta función para las $\mathcal{L}$ -fórmulas:

- Caso base :
- $la(t_1 = t_2) = 1 + la(t_1) + la(t_2)$
 - $la(R(t_1, \dots, t_n)) = 3 + (n - 1) + \sum_{i=1}^n la(t_i)$
- Caso inductivo :
- $la((\neg \varphi)) = 3 + la(\varphi)$
 - $la((\varphi \star \psi)) = 3 + la(\varphi) + la(\psi),$
donde $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
 - $la((\exists x \varphi)) = 4 + la(\varphi)$
 - $la((\forall x \varphi)) = 4 + la(\varphi)$

En el ejemplo inicial:

$$\begin{aligned} la((\exists x (R(x, x) \wedge x = f(y)))) &= \\ &= 4 + la((R(x, x) \wedge x = f(y))) \\ &= 4 + 3 + la(R(x, x)) + la(x = f(y)) \\ &= 4 + 3 + 4 + la(x) + la(x) + 1 + la(x) + la(f(y)) \\ &= 4 + 3 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + la(y) \\ &= 4 + 3 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 1 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Inducción en la lógica de primer orden

Principio de inducción: Para cada subconjunto A del conjunto de $\mathcal{L}$ -fórmulas tal que

- Caso base
 - : para cada par t_1, t_2 de $\mathcal{L}$ -términos, $t_1 = t_2 \in A$
 - : para cada predicado n -ario R y cada secuencia de $\mathcal{L}$ -términos $t_1, \dots, t_n$, $R(t_1, \dots, t_n) \in A$
- Caso inductivo
 - : si $\varphi, \psi \in A$, entonces $(\neg\varphi) \in A$ y $(\varphi \star \psi) \in A$, donde $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
 - : si $\varphi \in A$ y x es una variable, entonces $(\exists x \varphi) \in A$ y $(\forall x \varphi) \in A$

se tiene que A es igual al conjunto de $\mathcal{L}$ -fórmulas

Notación

Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

Notación

Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

¿Es $\forall x \exists y \ x = y + y$ cierta en $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$?

- ▶ Si pensamos en los números naturales es falsa
- ▶ Pero $\mathcal{L}$ también puede usarse como vocabulario para los números reales, y en este conjunto la fórmula es cierta

Notación

Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

¿Es $\forall x \exists y \ x = y + y$ cierta en $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$?

- ▶ Si pensamos en los números naturales es falsa
- ▶ Pero $\mathcal{L}$ también puede usarse como vocabulario para los números reales, y en este conjunto la fórmula es cierta

El valor de verdad de una fórmula depende de la **interpretación que se da a las constantes, funciones y relaciones.**

- ▶ Tenemos que introducir la noción de estructura

Semántica de la lógica de primer orden: Estructuras

Una $\mathcal{L}$ -estructura interpreta todos los componentes de $\mathcal{L}$ en un dominio.

Semántica de la lógica de primer orden: Estructuras

Una $\mathcal{L}$ -estructura interpreta todos los componentes de $\mathcal{L}$ en un dominio.

Definición

Una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ contiene:

- ▶ Un dominio A no vacío
- ▶ Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, una interpretación $c^{\mathfrak{A}} \in A$ de c
- ▶ Para cada función m -aria $f \in \mathcal{L}$, una interpretación $f^{\mathfrak{A}} : A^m \rightarrow A$ de f
- ▶ Para cada relación n -aria $R \in \mathcal{L}$, una interpretación $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ de R

Semántica de la lógica de primer orden: Estructuras

Una $\mathcal{L}$ -estructura interpreta todos los componentes de $\mathcal{L}$ en un dominio.

Definición

Una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ contiene:

- ▶ Un dominio A no vacío
- ▶ Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, una interpretación $c^{\mathfrak{A}} \in A$ de c
- ▶ Para cada función m -aria $f \in \mathcal{L}$, una interpretación $f^{\mathfrak{A}} : A^m \rightarrow A$ de f
- ▶ Para cada relación n -aria $R \in \mathcal{L}$, una interpretación $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ de R

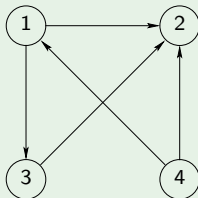
Notación

$$\mathfrak{A} = \langle A, c^{\mathfrak{A}}, \dots, f^{\mathfrak{A}}, \dots, R^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$$

Algunos ejemplos de estructuras

Ejemplo

Para representar grafos usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$. Por ejemplo, el siguiente grafo:



es representado por la estructura $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\}, \\ E^{\mathfrak{A}} &= \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}. \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de estructuras

Ejemplo

Los números naturales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, s^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}} \rangle.$$

Los números reales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, s^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}} \rangle.$$

Ahora podemos decir que $\mathfrak{N}$ no satisface $\forall x \exists y \ x = y + y$ y que $\mathfrak{R}$ si satisface esta fórmula.

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Necesitamos introducir la noción de **variable libre**.

El conjunto de variables de un $\mathcal{L}$ -término t se define como:

- ▶ Si $t = c$ es una constante, entonces $V(t) = \emptyset$
- ▶ Si $t = x$ es una variable, entonces $V(t) = \{x\}$
- ▶ Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, entonces $V(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Necesitamos introducir la noción de **variable libre**.

El conjunto de variables de un $\mathcal{L}$ -término t se define como:

- ▶ Si $t = c$ es una constante, entonces $V(t) = \emptyset$
- ▶ Si $t = x$ es una variable, entonces $V(t) = \{x\}$
- ▶ Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, entonces $V(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$

Ejemplo

$$\begin{aligned} V(f(g(x, y), s(0))) &= V(g(x, y)) \cup V(s(0)) \\ &= V(x) \cup V(y) \cup V(0) \\ &= \{x\} \cup \{y\} \cup \emptyset \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

El conjunto de variables de una $\mathcal{L}$ -fórmula φ se define como:

- ▶ Si $\varphi = t_1 = t_2$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup V(t_2)$
- ▶ Si $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$
- ▶ Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $V(\varphi) = V(\psi)$
- ▶ Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ ($\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), entonces $V(\varphi) = V(\psi) \cup V(\theta)$
- ▶ Si $\varphi = (\exists x \psi)$ o $\varphi = (\forall x \psi)$, entonces $V(\varphi) = \{x\} \cup V(\psi)$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

El conjunto de variables de una $\mathcal{L}$ -fórmula φ se define como:

- ▶ Si $\varphi = t_1 = t_2$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup V(t_2)$
- ▶ Si $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$
- ▶ Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $V(\varphi) = V(\psi)$
- ▶ Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ ($\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), entonces $V(\varphi) = V(\psi) \cup V(\theta)$
- ▶ Si $\varphi = (\exists x \psi)$ o $\varphi = (\forall x \psi)$, entonces $V(\varphi) = \{x\} \cup V(\psi)$

Ejemplo

$$\begin{aligned} V((\exists x P(x)) \vee (\forall y Q(s(y)))) &= V(\exists x P(x)) \cup V(\forall y Q(s(y))) \\ &= \{x\} \cup V(P(x)) \cup \{y\} \cup V(Q(s(y))) \\ &= \{x\} \cup V(x) \cup \{y\} \cup V(s(y)) \\ &= \{x\} \cup \{x\} \cup \{y\} \cup V(y) \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Definición

El conjunto de variables libres de una $\mathcal{L}$ -fórmula φ se define como:

- ▶ Si φ es una fórmula atómica, entonces $VL(\varphi) = V(\varphi)$
- ▶ Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi)$
- ▶ Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ ($\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \cup VL(\theta)$
- ▶ Si $\varphi = (\exists x \psi)$ o $\varphi = (\forall x \psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$

Variable libre: No aparece cuantificada

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Ejemplo

$$VL(P(x) \wedge \exists y Q(x, y)) = \{x\}$$

$$VL(P(z) \wedge \exists z R(z)) = \{z\}$$

Ejemplo

$$VL(P(x) \wedge \exists y Q(x, y)) = \{x\}$$

$$VL(P(z) \wedge \exists z R(z)) = \{z\}$$

Notación

- ▶ Si φ es una fórmula, entonces usamos $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ para indicar que $VL(\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$
- ▶ Decimos que φ es una **oración** si $VL(\varphi) = \emptyset$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Si una fórmula contiene variables libres, entonces no podemos decir directamente que es verdadera o falsa en una estructura.

- ▶ ¿Es $x < s(0)$ cierta en $\mathfrak{N}$?

El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

- ▶ Si x es 0, entonces $x < s(0)$ es cierta en $\mathfrak{N}$. Pero si x es 1, entonces es falsa

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A , una asignación σ es una función que asigna a cada variable un valor en A .

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A , una asignación σ es una función que asigna a cada variable un valor en A .

Extendemos σ para dar valores a los términos:

- ▶ Si $t = c$ es una constante, entonces $\hat{\sigma}(t) = c^{\mathfrak{A}}$
- ▶ Si $t = x$ es una variable, entonces $\hat{\sigma}(t) = \sigma(x)$
- ▶ Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, entonces $\hat{\sigma}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Ejemplo

Si $\sigma(x) = 7$ es una asignación para $\mathfrak{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(s(1) \cdot s(x)) &= \hat{\sigma}(s(1)) \cdot^{\mathfrak{N}} \hat{\sigma}(s(x)) \\ &= s^{\mathfrak{N}}(\hat{\sigma}(1)) \cdot^{\mathfrak{N}} s^{\mathfrak{N}}(\hat{\sigma}(x)) \\ &= s^{\mathfrak{N}}(1^{\mathfrak{N}}) \cdot^{\mathfrak{N}} s^{\mathfrak{N}}(\sigma(x)) \\ &= 2 \cdot^{\mathfrak{N}} s^{\mathfrak{N}}(7) \\ &= 2 \cdot^{\mathfrak{N}} 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Vamos a definir la semántica de la lógica de primer orden.

Dado: Un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y una asignación σ para $\mathfrak{A}$.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Vamos a definir la semántica de la lógica de primer orden.

Dado: Un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y una asignación σ para $\mathfrak{A}$.

Definición

Decimos que $(\mathfrak{A}, \sigma)$ satisface una $\mathcal{L}$ -fórmula φ , denotado como $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$, si y sólo si:

- ▶ $\varphi = t_1 = t_2$ y $\hat{\sigma}(t_1) = \hat{\sigma}(t_2)$
- ▶ $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$ y $(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$ y no es cierto que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ (denotado como $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$)
- ▶ $\varphi = (\psi \vee \theta)$, y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

- ▶ $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \theta)$, y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$
- ▶ $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$, y ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$, o ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \theta$
- ▶ $\varphi = (\exists x \psi)$ y existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$, donde

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & y = x \\ \sigma(y) & y \neq x \end{cases}$$

- ▶ $\varphi = (\forall x \psi)$ y para todo $a \in A$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

- ▶ $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \theta)$, y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$
- ▶ $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$, y ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$, o ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \theta$
- ▶ $\varphi = (\exists x \psi)$ y existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$, donde

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & y = x \\ \sigma(y) & y \neq x \end{cases}$$

- ▶ $\varphi = (\forall x \psi)$ y para todo $a \in A$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$

Nota: Si φ es una oración, podemos decir que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Semántica de la lógica de primer orden: Ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$.

- ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son ciertas en $\mathfrak{A}$:
 $\exists x \forall y E(x, y)$, $\forall x \exists y E(x, y)$, $\exists x \forall y \neg E(x, y)$, $\forall x \exists y \neg E(x, y)$?

Lógica de primer orden: Ejercicios

1. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $n \geq 1$. Construya una $\mathcal{L}$ -oración φ_n tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi_n$ si y sólo si el dominio de $\mathfrak{A}$ tiene al menos n elementos.
2. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $n \geq 1$. Construya una $\mathcal{L}$ -oración ψ_n tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi_n$ si y sólo si el dominio de $\mathfrak{A}$ tiene exactamente n elementos.
3. Sea f una función unaria y $\mathcal{L} = \{f\}$. Construya una $\mathcal{L}$ -estructura finita que satisfaga $\varphi = \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$.
4. Sean $\mathcal{L}$ y φ como en el ejercicio anterior. Construya una $\mathcal{L}$ -estructura que satisfaga $\psi = (\varphi \wedge \exists x \forall y f(y) \neq x)$. ¿Existe una estructura finita que satisfaga ψ ?

Fórmulas satisfacibles

Decimos que una $\mathcal{L}$ -fórmula φ es **satisfacible** si existe una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación σ para $\mathfrak{A}$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- ▶ Si φ es oración, entonces φ es satisfacible si existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Fórmulas satisfacibles

Decimos que una $\mathcal{L}$ -fórmula φ es **satisfacible** si existe una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación σ para $\mathfrak{A}$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- Si φ es oración, entonces φ es satisfacible si existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Si una fórmula no es satisfacible, entonces decimos que es una contradicción.

Ejercicio

Construya fórmulas satisfacibles y otras contradictorias.

Fórmulas válidas

Decimos que una $\mathcal{L}$ -fórmula φ es **válida** si para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación σ para $\mathfrak{A}$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- ▶ Si φ es oración, entonces φ es válida si para todo $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Fórmulas válidas

Decimos que una $\mathcal{L}$ -fórmula φ es **válida** si para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación σ para $\mathfrak{A}$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- ▶ Si φ es oración, entonces φ es válida si para todo $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Ejercicio

Construya fórmulas válidas.

Equivalencia de fórmulas

Definición

Dos $\mathcal{L}$ -fórmulas φ, ψ son **equivalentes**, denotado como $\varphi \equiv \psi$, si para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación σ para $\mathfrak{A}$, se tiene que:

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad (\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$$

Si en la definición anterior φ, ψ son oraciones, entonces son equivalentes si para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models \psi$$

Algunas equivalencias útiles

Todas las equivalencias para la lógica proposicional siguen siendo válidas en este contexto.

- ▶ doble negación, leyes de De Morgan, conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$, asociatividad de $\wedge$ y $\vee$, distributividad de $\wedge$ sobre $\vee$ y de $\vee$ sobre $\wedge$, implicancia, doble implicancia, ...

Algunas equivalencias útiles

Todas las equivalencias para la lógica proposicional siguen siendo válidas en este contexto.

- ▶ doble negación, leyes de De Morgan, conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$, asociatividad de $\wedge$ y $\vee$, distributividad de $\wedge$ sobre $\vee$ y de $\vee$ sobre $\wedge$, implicancia, doble implicancia, ...

Tenemos nuevas equivalencias útiles:

$$\forall x \varphi \equiv \neg(\exists x \neg \varphi)$$

$$\exists x \varphi \equiv \neg(\forall x \neg \varphi)$$

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)$$

$$\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi)$$

1. Demuestre las equivalencias anteriores.
2. ¿Son ciertas las equivalencias $\forall x (\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x \varphi) \vee (\forall x \psi)$ y $\exists x (\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x \varphi) \wedge (\exists x \psi)$?

La noción de consecuencia lógica

Sea Σ un conjunto de $\mathcal{L}$ -oraciones. Una estructura $\mathfrak{A}$ satisface Σ si para cada $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Notación: $\mathfrak{A} \models \Sigma$

La noción de consecuencia lógica

Sea Σ un conjunto de $\mathcal{L}$ -oraciones. Una estructura $\mathfrak{A}$ satisface Σ si para cada $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Notación: $\mathfrak{A} \models \Sigma$

Definición

Una $\mathcal{L}$ -oración φ es *consecuencia lógica* de un conjunto Σ de $\mathcal{L}$ -oraciones si para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$:

si $\mathfrak{A} \models \Sigma$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$

Notación: $\Sigma \models \varphi$

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{L} = \{Hombre(\cdot), Mortal(\cdot), Socrates\}$. En este vocabulario, demuestre que:

$$\{\forall x (Hombre(x) \rightarrow Mortal(x)), \\ Hombre(Socrates)\} \models Mortal(Socrates)$$

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\begin{aligned} \{\exists y \forall x R(x, y)\} &\models \forall x \exists y R(x, y) \\ \{\forall x \exists y R(x, y)\} &\models \exists y \forall x R(x, y) \end{aligned}$$

3. Un conjunto Σ de $\mathcal{L}$ -oraciones es satisfacible si existe una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. En caso contrario, Σ es inconsistente (o contradictorio).

Demuestre que $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.