

Comentarios finales: Inducción a partir de un número

Dado $k \in \mathbb{N}$, queremos un principio de inducción para los números mayores o iguales a k

- ▶ Queremos demostrar una propiedad para todos los números mayores o iguales a k
- ▶ Definimos $\mathbb{N}_{\geq k}$ como $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$

Principio de inducción modificado: para cada $A \subseteq \mathbb{N}_{\geq k}$ tal que

Caso base : $k \in A$,

Caso inductivo : si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$,

se tiene que $A = \mathbb{N}_{\geq k}$.

Comentarios finales: Inducción fuerte en los números naturales

En algunos casos conviene usar un principio de inducción con una hipótesis de inducción más fuerte.

Principio de inducción fuerte: para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

Caso base : $0 \in A$,

Caso inductivo : si $k \in A$ para cada $k < n$, entonces $n \in A$,

se tiene que $A = \mathbb{N}$.

- ¿Por qué es cierto este principio?

Ejercicio final

- ▶ Demuestre usando inducción fuerte que todo número natural $n \geq 2$ puede ser escrito como una multiplicación de potencias de números primos.
- ▶ Vale decir, demuestre que existen números primos $p_1, \dots, p_k$ ($k \geq 1$) y números naturales $\ell_1, \dots, \ell_k$ tales que:

$p_i < p_{i+1}$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$,

$\ell_i \geq 1$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\ell_i}$$