

Ejercicio

Usando la formulación del principio de inducción mostrada en la transparencia anterior, demuestre que:

► $2^{2 \cdot n} - 1$ es divisible por 3

►
$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

Inducción estructural

La forma en que definimos $\mathbb{N}$ puede ser usada para definir otros conjuntos.

- ▶ Esto nos va a permitir deducir principios de inducción para estos conjuntos.

Nos referimos a esto como inducción estructural.

- ▶ El principio de inducción se deduce de la definición de la estructura del conjunto.

Vamos a ver algunos ejemplos de este tipo de inducción.

- ▶ Y vamos a usar esto en las siguientes secciones del curso ...

Strings sobre un alfabeto

Un alfabeto Σ es un conjunto finito de símbolos.

- ▶ Por ejemplo $\Sigma = \{0, 1\}$ y $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Un string sobre Σ es una secuencia finita de símbolos de Σ .

- ▶ Por ejemplo: 00 y 11001 son strings sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$
- ▶ También lo es ε , el string vacío

Strings sobre un alfabeto

Llamamos Σ^* al conjunto de todos los strings sobre Σ .

- ▶ ¿Cómo podemos definir formalmente Σ^* ?
 - ▶ ¿Podemos definir esto de la misma manera que para $\mathbb{N}$?
- ▶ ¿Podemos deducir un principio de inducción en este caso?

Strings sobre un alfabeto: Definición

Sea Σ un alfabeto.

Σ^* es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $\varepsilon \in \Sigma^*$
2. Si $w \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$, entonces $aw \in \Sigma^*$

Strings sobre un alfabeto: Un principio de inducción

Sea Σ un alfabeto.

Principio de inducción: para cada $A \subseteq \Sigma^*$ tal que

Caso base : $\varepsilon \in A$,

Caso inductivo : si $w \in A$ y $a \in \Sigma$, entonces $aw \in A$,

se tiene que $A = \Sigma^*$.

- ¿Por qué es cierto este principio?

Definición de funciones sobre strings

Suponga que Σ es un alfabeto.

Podemos usar la naturaleza inductiva de Σ^* para definir funciones sobre este conjunto.

Dado w sobre Σ , queremos definir $\text{largo}(w)$ como el largo de w .

- ▶ Contamos el número de símbolos de Σ en la secuencia definida por w

Definimos $\text{largo}(w)$ de manera inductiva:

- ▶ $\text{largo}(\varepsilon) = 0$
- ▶ $\text{largo}(aw) = 1 + \text{largo}(w)$

Ejercicios

1. Suponiendo que $\Sigma = \{0, 1\}$, defina la función $\text{cero}(w)$ que indica el número de posiciones en w que contienen el símbolo 0.
 - ▶ Por ejemplo: $\text{cero}(111) = 0$, $\text{cero}(10100) = 3$ y $\text{cero}(00) = 2$
2. Dado un alfabeto Σ , defina la función $\text{inverso}(w)$ como el string inverso de w .
 - ▶ Por ejemplo: $\text{inverso}(111) = 111$ y $\text{inverso}(10100) = 00101$

Inducción estructural sobre strings: Un ejemplo

Suponga que Σ es un alfabeto y $w \in \Sigma^*$

- ▶ Además suponga que $w = a_1 \cdots a_n$, donde $n \geq 0$
- ▶ Si $n = 0$, entonces $w = \varepsilon$

Decimos que w' es un substring de w si:

- ▶ $w' = \varepsilon$ o $w' = a_i \cdots a_j$ con $1 \leq i \leq j \leq n$

Ejemplo

ε , 011, 001 y 1101 son substrings de 001101.

Inducción estructural sobre strings: Un ejemplo

Demostraremos que si $\text{largo}(w) = n$, entonces el número de substrings de w es:

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} + 1$$

Vamos a hacer esta demostración por inducción.

Caso base: $w = \varepsilon$

En este caso tenemos que $\text{largo}(w) = 0$ y el número de substrings de w es 1, por lo que la propiedad se cumple.

Caso inductivo: Suponemos que la propiedad se cumple para w y consideramos $a \in \Sigma$.

► El número de substrings de w es $\frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1$

Tenemos que demostrar que la propiedad se cumple para aw .

Inducción estructural sobre strings: Un ejemplo

Suponemos que $w = a_1 \dots a_n$

Si w_1 es un substring de aw , entonces alguna de las siguientes posibilidades es cierta:

- (i) $w_1 = aw_2$, donde $w_2 = a_1 \dots a_j$ con $0 \leq j \leq n$
- (ii) w_1 es un substring de w

El número de strings w_1 que satisface la condición (i) es $(n + 1)$

Por hipótesis de inducción, el número de strings w_1 que satisface la condición (ii) es $\frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1$

Inducción estructural sobre strings: Un ejemplo

Por lo tanto, el número de substrings de aw es:

$$\begin{aligned}\frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1 + (n+1) &= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{n^2 + n + 2 \cdot n + 2}{2} + 1 \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} + 1\end{aligned}$$

Concluimos entonces que la propiedad se cumple para aw ya que $\text{largo}(aw) = 1 + \text{largo}(w) = n + 1$. □

Ejercicios

Decimos que un string w es un palíndromo si $\text{inverso}(w) = w$.

- ▶ 0, 0110 y 10101 son palíndromos, mientras que 011 y 1011 no lo son

Resuelva los siguientes problemas.

1. Dado un alfabeto Σ , defina como en el caso de $\mathbb{N}$ es conjunto $\text{PAL}(\Sigma)$ de todos los strings w sobre Σ que son palíndromos.
2. Basado en la definición anterior, defina un principio de inducción para $\text{PAL}(\Sigma)$.
3. Usando este principio de inducción demuestre que el número de palíndromos de largo n es:

$$\begin{array}{ll} |\Sigma|^k & \text{si } n = 2 \cdot k \\ |\Sigma|^{k+1} & \text{si } n = 2 \cdot k + 1 \end{array}$$