

Inducción

IIC1253

Inducción en los números naturales: Formulación intuitiva

Si P es una propiedad tal que:

Caso base : P se cumple para 0,

Caso inductivo : si P se cumple para n ,
entonces P se cumple para $n + 1$,

entonces se tiene que P se satisface para todos los números naturales.

Inducción en los números naturales: Formulación intuitiva

Si P es una propiedad tal que:

Caso base : P se cumple para 0,

Caso inductivo : si P se cumple para n ,
entonces P se cumple para $n + 1$,

entonces se tiene que P se satisface para todos los números naturales.

¿Por qué es cierto este principio?

Ejercicios

1. Demuestre usando inducción que $2^{2 \cdot n} - 1$ es divisible por 3.

- ▶ Recuerde que un número natural m es divisible por 3 si existe otro número natural k tal que $m = k \cdot 3$
- ▶ ¿Cuál es la propiedad P en este caso?

2. Demuestre usando inducción que:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

- ▶ Demuestre primero que $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$, para $1 \leq i \leq n$. ¿Puede usar inducción para esto?
- ▶ ¿Cuál es la propiedad P en este segundo caso?

En búsqueda de una definición formal . . .

¿Por qué la formulación inicial es *intuitiva*?

En búsqueda de una definición formal ...

¿Por qué la formulación inicial es *intuitiva*?

Pero antes: ¿Por qué necesitamos una definición formal?

En búsqueda de una definición formal ...

¿Por qué la formulación inicial es *intuitiva*?

Pero antes: ¿Por qué necesitamos una definición formal?

- ▶ Para poder demostrar la validez del principio

En búsqueda de una definición formal ...

¿Por qué la formulación inicial es *intuitiva*?

Pero antes: ¿Por qué necesitamos una definición formal?

- ▶ Para poder demostrar la validez del principio

Nos falta responder algunas preguntas antes de tener una definición formal:

- ▶ ¿Qué es una propiedad?
- ▶ ¿Qué significa que una propiedad se cumpla para un número natural?
- ▶ ¿Qué significa que una propiedad se cumpla para todos los números naturales?

En búsqueda de una definición formal ...

Para responder a las preguntas anteriores:

- ▶ Vamos a utilizar algunas nociones de teoría de conjuntos
- ▶ Vamos a definir los números naturales usando estas nociones

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Pertenencia: $\in$

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $1 \in A$?
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in A$?
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in A$?
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in B$?
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in B$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Pertenencia: $\in$

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $1 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in A$?
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in A$?
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in B$?
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in B$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Pertenencia: $\in$

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $1 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in A$?
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in B$?
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in B$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Pertenencia: $\in$

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $1 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in B$?
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in B$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Pertenencia: $\in$

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $1 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in B$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in B$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Pertenencia: $\in$

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $1 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in B$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in B$? No

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Pertenencia: $\in$

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $1 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in A$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $\{2\} \in B$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $2 \in B$? No

Ejercicio

¿Es cierto que si $a \in b$ y $b \in c$, entonces $a \in c$? Demuestre o de un contraejemplo.

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Subconjunto: $\subseteq$

- ▶ $A \subseteq B$ ssi para cada $a \in A$, se tiene que $a \in B$

Suponga que $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ y $C = \{1, 2, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq B$?
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq A$?
- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq C$?
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq C$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Subconjunto: $\subseteq$

- ▶ $A \subseteq B$ ssi para cada $a \in A$, se tiene que $a \in B$

Suponga que $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ y $C = \{1, 2, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq B$? No
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq A$?
- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq C$?
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq C$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Subconjunto: $\subseteq$

- ▶ $A \subseteq B$ ssi para cada $a \in A$, se tiene que $a \in B$

Suponga que $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ y $C = \{1, 2, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq B$? No
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq C$?
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq C$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Subconjunto: $\subseteq$

- ▶ $A \subseteq B$ ssi para cada $a \in A$, se tiene que $a \in B$

Suponga que $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ y $C = \{1, 2, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq B$? No
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq C$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq C$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Subconjunto: $\subseteq$

- ▶ $A \subseteq B$ ssi para cada $a \in A$, se tiene que $a \in B$

Suponga que $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ y $C = \{1, 2, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq B$? No
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq C$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq C$? Sí

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Subconjunto: $\subseteq$

- ▶ $A \subseteq B$ ssi para cada $a \in A$, se tiene que $a \in B$

Suponga que $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ y $C = \{1, 2, \{2\}\}$

- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq B$? No
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq A$? No
- ▶ ¿Es cierto que $A \subseteq C$? Sí
- ▶ ¿Es cierto que $B \subseteq C$? Sí

Ejercicio

¿Es cierto que si $D \subseteq E$ y $E \subseteq F$, entonces $D \subseteq F$? Demuestre o de un contraejemplo.

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Igualdad de conjuntos: =

- ▶ $A = B$ ssi $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Responda las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$?
- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Igualdad de conjuntos: $=$

- ▶ $A = B$ ssi $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Responda las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$? Sí, el orden no importa
- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Igualdad de conjuntos: =

- ▶ $A = B$ ssi $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Responda las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$? Sí, el orden no importa
- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$? Sí, las repeticiones no importan

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Igualdad de conjuntos: $=$

- ▶ $A = B$ ssi $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Responda las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$? Sí, el orden no importa
- ▶ ¿Es cierto que $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$? Sí, las repeticiones no importan

Otras nociones útiles:

- ▶ $a \notin A$: no es cierto que $a \in A$
- ▶ $A \not\subseteq B$: no es cierto que $A \subseteq B$
- ▶ $A \subsetneq B$: A es subconjunto propio de B , vale decir, $A \subseteq B$ y $B \not\subseteq A$

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Cardinalidad de un conjunto: $|A|$

- ▶ $|A|$: número de elementos distintos en A

Por ejemplo: $|\{1, 2\}| = |\{1, 1, 2\}| = 2$

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Cardinalidad de un conjunto: $|A|$

- ▶ $|A|$: número de elementos distintos en A

Por ejemplo: $|\{1, 2\}| = |\{1, 1, 2\}| = 2$

Conjunto potencia: 2^A

- ▶ $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$

Por ejemplo: $2^{\{1,2\}} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

- ▶ Usamos la notación $\emptyset$ para $\{\}$

Ejercicio

Suponiendo que $|A| = n$ ($n \geq 0$), ¿cuál es el valor de $|2^A|$?

- ▶ ¿Para qué conjunto se tiene que $|A| = 0$?

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Operaciones básicas: $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) y $\setminus$ (diferencia)

▶ $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ o } a \in B\}$

▶ $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \in B\}$

▶ $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \notin B\}$

Suponiendo que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$:

▶ $A \cup B =$

▶ $A \cap B =$

▶ $A \setminus B =$

▶ $B \setminus A =$

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Operaciones básicas: $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) y $\setminus$ (diferencia)

- ▶ $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ o } a \in B\}$
- ▶ $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \in B\}$
- ▶ $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \notin B\}$

Suponiendo que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$:

- ▶ $A \cup B = \{1, 2, \{2\}\}$
- ▶ $A \cap B =$
- ▶ $A \setminus B =$
- ▶ $B \setminus A =$

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Operaciones básicas: $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) y $\setminus$ (diferencia)

- ▶ $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ o } a \in B\}$
- ▶ $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \in B\}$
- ▶ $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \notin B\}$

Suponiendo que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$:

- ▶ $A \cup B = \{1, 2, \{2\}\}$
- ▶ $A \cap B = \{1\}$
- ▶ $A \setminus B =$
- ▶ $B \setminus A =$

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Operaciones básicas: $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) y $\setminus$ (diferencia)

- ▶ $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ o } a \in B\}$
- ▶ $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \in B\}$
- ▶ $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \notin B\}$

Suponiendo que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$:

- ▶ $A \cup B = \{1, 2, \{2\}\}$
- ▶ $A \cap B = \{1\}$
- ▶ $A \setminus B = \{2\}$
- ▶ $B \setminus A =$

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Operaciones básicas: $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) y $\setminus$ (diferencia)

- ▶ $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ o } a \in B\}$
- ▶ $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \in B\}$
- ▶ $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \notin B\}$

Suponiendo que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$:

- ▶ $A \cup B = \{1, 2, \{2\}\}$
- ▶ $A \cap B = \{1\}$
- ▶ $A \setminus B = \{2\}$
- ▶ $B \setminus A = \{\{2\}\}$

Algunas nociones de teoría de conjuntos (repaso)

Operaciones básicas: $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) y $\setminus$ (diferencia)

- ▶ $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ o } a \in B\}$
- ▶ $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \in B\}$
- ▶ $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ y } a \notin B\}$

Suponiendo que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, \{2\}\}$:

- ▶ $A \cup B = \{1, 2, \{2\}\}$
- ▶ $A \cap B = \{1\}$
- ▶ $A \setminus B = \{2\}$
- ▶ $B \setminus A = \{\{2\}\}$

Ejercicio

Demuestre que $A \cap B \subseteq A$ y $A \subseteq A \cup B$.

Algunas nociones de teoría de conjuntos: Operaciones generalizadas

Suponga que $X \subseteq 2^A$ y $X \neq \emptyset$

- X es un conjunto de conjuntos

Entonces:

$$\bigcup X = \{a \mid \text{existe } B \in X \text{ tal que } a \in B\}$$

$$\bigcap X = \{a \mid \text{para todo } B \in X \text{ se tiene que } a \in B\}$$

Algunas nociones de teoría de conjuntos: Operaciones generalizadas

Suponga que $X \subseteq 2^A$ y $X \neq \emptyset$

- X es un conjunto de conjuntos

Entonces:

$$\bigcup X = \{a \mid \text{existe } B \in X \text{ tal que } a \in B\}$$

$$\bigcap X = \{a \mid \text{para todo } B \in X \text{ se tiene que } a \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $X = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$:

$$\bigcup X =$$

$$\bigcap X =$$

Algunas nociones de teoría de conjuntos: Operaciones generalizadas

Suponga que $X \subseteq 2^A$ y $X \neq \emptyset$

- X es un conjunto de conjuntos

Entonces:

$$\bigcup X = \{a \mid \text{existe } B \in X \text{ tal que } a \in B\}$$

$$\bigcap X = \{a \mid \text{para todo } B \in X \text{ se tiene que } a \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $X = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$:

$$\bigcup X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bigcap X =$$

Algunas nociones de teoría de conjuntos: Operaciones generalizadas

Suponga que $X \subseteq 2^A$ y $X \neq \emptyset$

- X es un conjunto de conjuntos

Entonces:

$$\bigcup X = \{a \mid \text{existe } B \in X \text{ tal que } a \in B\}$$

$$\bigcap X = \{a \mid \text{para todo } B \in X \text{ se tiene que } a \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $X = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$:

$$\bigcup X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bigcap X = \{2\}$$

Algunas nociones de teoría de conjuntos: Minimalidad

Suponga que $X \subseteq 2^A$

Dado $B \in X$:

- ▶ B es un **mínimo** en X si para cada $C \in X$ se tiene que $B \subseteq C$
 - ▶ También decimos que B es un elemento mínimo o menor conjunto en X .
- ▶ B es **mínimal** en X si para cada $C \in X$ no es cierto que $C \subsetneq B$
 - ▶ También decimos que B es un elemento minimal en X .

Minimalidad: Ejercicios

1. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^A$. Demuestre que si $B \in X$ es un mínimo en X , entonces B es minimal en X .

Minimalidad: Ejercicios

1. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^A$. Demuestre que si $B \in X$ es un mínimo en X , entonces B es minimal en X .
2. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^A$, donde A es un conjunto finito.
 - ▶ ¿Es cierto que X tiene un elemento mínimo?
 - ▶ ¿Es cierto que X tiene un elemento minimal?

Minimalidad: Ejercicios

1. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^A$. Demuestre que si $B \in X$ es un mínimo en X , entonces B es minimal en X .
2. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^A$, donde A es un conjunto finito.
 - ▶ ¿Es cierto que X tiene un elemento mínimo?
 - ▶ ¿Es cierto que X tiene un elemento minimal?
3. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.
 - ▶ ¿Es cierto que X tiene un elemento minimal?

Minimalidad: Ejercicios

Dado $X \subseteq 2^A$, decimos que X es cerrado bajo intersección si para cada $B \in X$ y $C \in X$, se tiene que $B \cap C \in X$

4. De un ejemplo de un conjunto cerrado bajo intersección.
5. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^A$, donde A es un conjunto finito. Demuestre que si X es cerrado bajo intersección, entonces X tiene un mínimo.

Minimalidad: Ejercicios

Dado $X \subseteq 2^A$, decimos que X es cerrado bajo intersección si para cada $B \in X$ y $C \in X$, se tiene que $B \cap C \in X$

4. De un ejemplo de un conjunto cerrado bajo intersección.
5. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^A$, donde A es un conjunto finito. Demuestre que si X es cerrado bajo intersección, entonces X tiene un mínimo.
6. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ y X es cerrado bajo intersección.
 - ▶ ¿Es cierto que X tiene un elemento mínimo?
 - ▶ ¿Es cierto que X tiene un elemento minimal?

Minimalidad: Ejercicios

Dado $X \subseteq 2^A$, decimos que X es cerrado bajo intersección generalizada si para cada $\emptyset \subsetneq Y \subseteq X$, se tiene que $\bigcap Y \in X$

7. Suponga que $\emptyset \subsetneq X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Demuestre que si X es cerrado bajo intersección generalizada, entonces X tiene un mínimo.

► ¿Es su demostración válida para cualquier conjunto infinito?

Una definición de los números naturales

$\mathbb{N}$ es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

Una definición de los números naturales

$\mathbb{N}$ es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

- ▶ ¿Es esta una definición formal?
- ▶ ¿Por qué existe el menor conjunto mencionado en la definición?
 - ▶ Existen otros conjuntos que satisfacen la condición pero no son mínimos:

Una definición de los números naturales

$\mathbb{N}$ es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

- ▶ ¿Es esta una definición formal?
- ▶ ¿Por qué existe el menor conjunto mencionado en la definición?
 - ▶ Existen otros conjuntos que satisfacen la condición pero no son mínimos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ...

Inducción en los números naturales

Principio de inducción: para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

Caso base : $0 \in A$,

Caso inductivo : si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$,

se tiene que $A = \mathbb{N}$.

Inducción en los números naturales

Principio de inducción: para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

Caso base : $0 \in A$,

Caso inductivo : si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$,

se tiene que $A = \mathbb{N}$.

- ▶ ¿Soluciona esta definición los problemas mencionados en las primeras transparencias?
- ▶ ¿Por qué es cierto este principio?