

Cardinalidad

IIC1253

Conjuntos con la misma cardinalidad

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerosos, denotado como $A \approx B$, si existe una biyección $f : A \rightarrow B$.

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es equinumeroso con $\{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Teorema (Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}$ es equinumeroso con $\{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

Definición

Sean A y B dos conjuntos.

- ▶ Decimos que B es al menos tan numeroso como A , denotado como $A \preceq B$, si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$
- ▶ Decimos que B es más numeroso que A , denotado como $A \prec B$, si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$ y *no existe una función inyectiva $g : B \rightarrow A$*

Observación

Del teorema de Schröder-Bernstein: $A \approx B$ si y sólo si $A \preceq B$ y $B \preceq A$

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto infinito A se dice *enumerable* si $A \approx \mathbb{N}$.

Ejemplo

Los conjuntos $\{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y $\{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ son enumerables.

$\mathbb{Z}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Z}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

- ▶ ¿Por qué?

Para demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable:

- ▶ primero ordenamos los pares según la suma de sus valores, de menor a mayor;
- ▶ luego ordenamos los pares con la misma suma por el primer componente, de menor a mayor; y
- ▶ finalmente asignamos un número natural a cada par según el orden obtenido

$\mathbb{Z}$ es enumerable

$$(0, 0) \rightarrow 0$$

$$(0, 1) \rightarrow 1$$

$$(1, 0) \rightarrow 2$$

$$(0, 2) \rightarrow 3$$

$$(1, 1) \rightarrow 4$$

$$(2, 0) \rightarrow 5$$

$$(0, 3) \rightarrow 6$$

$$(1, 2) \rightarrow 7$$

$$(2, 1) \rightarrow 8$$

$$(3, 0) \rightarrow 9$$

...

$\mathbb{Z}$ es enumerable

Fórmula obtenida:

$$f(i, j) = \begin{cases} 0 & i + j = 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{i+j-1} k + 1 \right) + i & i + j > 0 \end{cases}$$

Vale decir:

$$f(i, j) = \begin{cases} 0 & i + j = 0 \\ \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i & i + j > 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $f(1, 1) = 4$ y $f(3, 0) = 9$

$\mathbb{Q}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Q}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es enumerable.

► ¿Por qué?

Esto es consecuencia de un resultado más general:

Teorema

Para cada $k \geq 3$, se tiene que $\mathbb{N}^k$ es enumerable.

Ejercicio

Demuestre el teorema para $k = 3$, y luego generalice su construcción para $k > 3$.

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de todos los strings contruidos con los símbolos 0 y 1 es enumerable
2. Sea Γ un conjunto finito de símbolos. Demuestre que el conjunto de todos los strings contruidos con los símbolos de Γ es enumerable
3. Utilize el resultado anterior para concluir que el conjunto de los polinomios $p(x)$ con coeficientes en los naturales es enumerable.

$\mathbb{R}$ no es enumerable

Por contradicción, supongamos que existe una biyección $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Vamos a obtener una contradicción usando el método de diagonalización de Cantor

Para cada $i \in \mathbb{N}$:

$$f(i) = n_i.d_{i,0}d_{i,1}\dots d_{i,j}\dots$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y $d_{i,j} \in \{0, \dots, 9\}$, para cada $j \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & n_0 \cdot \textcolor{red}{d}_{0,0} d_{0,1} d_{0,2} d_{0,3} \dots \\ f(1) & = & n_1 \cdot d_{1,0} \textcolor{red}{d}_{1,1} d_{1,2} d_{1,3} \dots \\ f(2) & = & n_2 \cdot d_{2,0} d_{2,1} \textcolor{red}{d}_{2,2} d_{2,3} \dots \\ f(3) & = & n_3 \cdot d_{3,0} d_{3,1} d_{3,2} \textcolor{red}{d}_{3,3} \dots \\ \dots & & \dots \\ f(i) & = & n_i \cdot d_{i,0} d_{i,1} d_{i,2} d_{i,3} \dots \textcolor{red}{d}_{i,i} \dots \\ \dots & & \dots \end{array}$$

Propiedad fundamental de r : $f(i) \neq r$ para cada $i \in \mathbb{N}$

- Usando esta propiedad obtenemos una contradicción: f no es sobre

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos r como:

$$r = 0.r_0r_1r_2\dots$$

donde r_i ($i \in \mathbb{N}$) es definido como:

$$r_i = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{i,i} \neq 5 \\ 4 & \text{si } d_{i,i} = 5 \end{cases}$$



¿Por qué la demostración anterior no funciona si reemplazamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Existencia de números trascendentes

Un número $a \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p(x)$ tal que:

- ▶ $p(x)$ no es nulo, y los coeficientes de $p(x)$ son números enteros
- ▶ $p(a) = 0$

Ejemplo

Cada número en $\mathbb{Q}$ es algebraico, además $\sqrt{2}$ es algebraico.

Un número $a \in \mathbb{R}$ es trascendente si no es algebraico.

- ▶ ¿Existen números trascendentes?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- ▶ Liouville (1850): $\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!}$
- ▶ Hermite (1873): e
- ▶ Lindemann (1882): π

Un argumento más simple: El conjunto de los polinomios $p(x)$ con coeficientes enteros es enumerable

- ▶ Como $\mathbb{R}$ no es enumerable, concluimos que existen números trascendentes

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Nombres para los números

Podemos asociar nombres a los números reales:

1264, mil doscientos sesenta y cuatro, 3.25, tres punto veinte y cinco, $\sqrt{2}$, raíz cuadrada positiva de 2, π , e, menor raíz del polinomio $3x^3 - 17x + 1$, ...

¿Podemos asociar un nombre a cada número real?

- ¿Qué alfabeto usamos?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Nombres para los números

Consideramos el alfabeto ASCII que tiene 95 caracteres (que pueden ser impresos)

- ▶ Otros alfabetos pueden ser codificados usando este alfabeto:
"3*x^3 - 17*x + 1", "pi"
- ▶ ¿Podemos considerar un alfabeto más pequeño? ¿0 y 1?

El conjunto de los strings que pueden construirse usando el alfabeto ASCII es enumerable

- ▶ ¡Tenemos más números en $\mathbb{R}$ que nombres para ellos!

Un teorema más general

Teorema (Cantor)

$$A \prec 2^A$$

Demostración: Si $A = \emptyset$, tenemos que $2^A = \{\emptyset\}$ y el teorema se cumple

- Suponemos que $A \neq \emptyset$

Primero debemos mostrar una función inyectiva $f : A \rightarrow 2^A$

- Para cada $a \in A$: $f(a) = \{a\}$

Teorema de Cantor: Demostración

Ahora debemos demostrar que no existe una biyección $g : A \rightarrow 2^A$.

- ▶ Por contradicción, suponemos que g existe

Definimos $B \subseteq A$ como sigue:

$$B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

Como g es sobre, existe $b \in A$ tal que $g(b) = B$.

- ▶ Se debe tener que $b \in g(b)$ o $b \notin g(b)$

Teorema de Cantor: Demostración

Consideramos los dos casos:

$$\begin{aligned} b \in g(b) &\Rightarrow b \in B \\ &\Rightarrow b \notin g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \notin g(b) &\Rightarrow b \notin B \\ &\Rightarrow b \in g(b) \end{aligned}$$

En ambos casos obtenemos una contradicción.

Teorema de Cantor: Problemas no decidibles

Una propiedad P sobre $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

- ▶ Por ejemplo, las siguientes son propiedades sobre $\mathbb{N}$:

PARES = $\{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es un número par}\}$

PRIMOS = $\{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es un número primo}\}$

Definición (informal)

Una propiedad sobre $\mathbb{N}$ es decible si existe un programa en Java (o Python) tal que:

- ▶ *recibe como entrada $n \in \mathbb{N}$;*
- ▶ *si $n \in P$ retorna **sí**, en caso contrario retorna **no***

Teorema de Cantor: Problemas no decidibles

Ejemplo

PARES y PRIMOS son decidibles.

¿Existe una propiedad P no decidible?

- ▶ No existe un procedimiento mecánico que pueda verificar si un elemento está en P

Teorema de Cantor: Problemas no decidibles

Tenemos que:

- ▶ El conjunto de los programas en Java (o Python) es enumerable
- ▶ $\{P \mid P \text{ es una propiedad sobre } \mathbb{N}\}$ es equinumeroso con $2^{\mathbb{N}}$

Por teorema de Cantor: $\mathbb{N} \prec 2^{\mathbb{N}}$

- ▶ Concluimos que existen propiedades sobre $\mathbb{N}$ que no son decidibles