IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*) - Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*)

Ayudantía 9.

Guía repaso I2.

Problema 1. Dado $p \in P$, decimos que p es un literal positivo, mientras que $(\neg p)$ es un literal negativo.

Una *cláusula de Horn* es una cláusula que tiene a lo más un literal positivo. Por ejemplo, $(\neg p)$, $(\neg p \vee \neg q)$ y $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s)$ son todas cláusulas de Horn, mientras que $(p \vee q \vee \neg r)$ no lo es, ya que tiene dos literales positivos. Decimos que una fórmula es una fórmula de Horn, si es una conjunción de cláusulas de Horn. Una fórmula de Horn, ¿está en CNF, DNF o ninguna de las dos?

Demuestre que existe una fórmula en $L(P)$ que no es equivalente a ningúna fórmula de Horn.

Problema 2. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de conectivos lógicos tal que $\mathcal{C} \subseteq \{\neg, \bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Demuestre que si $\mathcal{C}$ es funcionalmente completo, entonces se debe tener que $\neg \in \mathcal{C}$ o que $\bot \in \mathcal{C}$.

Problema 3. Decimos que un grafo $G = (V, E)$ es *conexo* si para cada $v_1, v_2 \in V$, existe un camino de v_1 a v_2 o de v_2 a v_1. Un grafo se dirá disconexo si no es conexo.

Definimos el complemento de un grafo $G = (V, E)$ como el grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ donde $\overline{E}$ es el complemento de la relación E bajo V, es decir, $\overline{E} = (V \times V) \setminus E$.

a) Demuestre que el complemento de un grafo disconexo es conexo.

b) Demuestre que hay más grafos conexos que disconexos.

c) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y no dirigido (E es simétrica) con n vértices y sea $G' = (V, E')$ el grafo conexo formado al "*darle direcciones*" a las aristas de G, es decir, para cada $a, b \in V$ tal que $\{a, b\} \in E$ se tendrá que $(a, b) \in E'$, o bien, que $(b, a) \in E'$, pero no ambas.
Demuestre que si G' admite un orden topológico, entonces G tiene a lo más $n - 1$ aristas.

Problema 4. Sea $\langle X, \preceq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Dado $S \subseteq X$, decimos que el supremo de S, denotado por $\sup S$, es la cota superior más pequeña de los elementos en S bajo $\preceq$, es decir, que para todo $s \in S$ se tiene que $s \preceq \sup S$ y que para cada $x \in X$ tal que $s \preceq x$ para todo $s \in S$ (es decir, x es una cota superior para S), se tiene que $\sup S \preceq x$.

Suponga que $\langle X, \preceq \rangle$ posee un máximo y un mínimo bajo $\preceq$ y que para cada conjunto $\Omega \subseteq X$ no vacío que tenga una cota superior bajo $\preceq$, se tiene que $\sup \Omega$ está bien definido y pertenece a X.

Sea $\varphi : X \to X$ una función creciente bajo $\preceq$, es decir, que para $x, y \in X$: si $x \preceq y$ entonces $f(x) \preceq f(y)$. Demuestre que φ posee un punto fijo en X, es decir, que existe $\overline{x} \in X$ tal que $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$.

Problema 5. Sea $\mathcal{R}$ un conjunto no numerable y sea $x \in \mathcal{R}$. Demuestre que aunque le saquemos un elemento a $\mathcal{R}$, su cardinalidad no cambia, es decir, demuestre que $\mathcal{R}\backslash\{x\}$ es equinumeroso con $\mathcal{R}$, implicando que tampoco es numerable. Suena razonable extender este razonamiento y ver que si quitamos una cantidad finita de elementos a $\mathcal{R}$, no altera su cardinalidad ni numerabilidad.

¿Qué pasa si se le quita una cantidad infinita, digamos numerable, a $\mathcal{R}$? Para responder esta pregunta, considere a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$ un conjunto numerable y decida si $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ es finito, numerable o no numerable.

Problema 6. Dado dos conjuntos A, B se define el conjunto ${}^{A}B$ como el conjunto de todas las funciones que van de A en B. Es decir:

$$ {}^{A}B = \{f \mid f : A \to B\}. $$

a) Dado dos conjuntos A y B, inuitivamente, ¿cuál es la cardinalidad de ${}^{A}B$?

b) Sean A, B, C conjuntos. ¿Existe una biyección entre ${}^{C}({}^{B}A)$ y ${}^{B\times C}A$?.

c) Dado dos conjuntos A y B tal que $A \approx B$, demuestre que ${}^{C}A \approx {}^{C}B$ para todo conjunto C.

d) Dados A, B, C conjuntos, demuestre que existe una biyección entre ${}^{C}(A \times B)$ y ${}^{C}A \times {}^{C}B$.

e) Para A, B, C conjuntos tal que $B \cap C = \emptyset$. Demuestre que ${}^{B\cup C}A$ es equinumeroso con ${}^{B}A \times {}^{C}A$.

Problema 7. Demuestre que $\mathbb{R}$ es equinumeroso con $2^{\mathbb{Q}}$.

Propuesto: ¿Existirá algún conjunto $\aleph_1$ tal que no es numerable y $\aleph_1 \prec \mathbb{R}$?
Una conjetura famosa en teoría de conjuntos, la hipótesis del continuo, nos plantea que no existe dicho conjunto. Esta es una pregunta abierta, planteada y trabajada desde el siglo XIX.

Problema 8. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables.

a) ¿Es $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ numerable?

b) Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un conjunto numerable.

c) Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las sucesiones, con coeficientes en $\mathbb{N}$, con una cantidad finita de números distintos de cero, es decir, $\mathcal{D}$ se puede definir como:

$$ \mathcal{D} = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{N} \text{ para cada } k \in \mathbb{N} \text{ y existe } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_k = 0 \text{ para todo } k \geq m\}. $$

Usando el resultado demostrado en *b*), demuestre que $\mathcal{D}$ es numerable.