IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*) - Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*)

Ayudantía 7.

Relaciones, clases de equivalencias y órdenes.

Problema 1. Dé ejemplos de relaciones sobre $\mathbb{N}$ que sean:

a) Simétrica y no transitiva.
b) Simétrica, no transitiva y refleja.
c) Orden parcial no conexo.
d) De equivalencia y conexa.
e) De equivalencia y antisimétrica.

Problema 2. Decimos que una relación $R \subseteq A \times A$ es *circular* si para todo $a, b, c \in A$ se tiene que si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces se tiene que $R(c, a)$.

Demuestre que si una relación R sobre A es refleja y circular, entonces es una relación de equivalencia.

Problema 3. El siguiente es un típico argumento incorrecto. Encuentre el error: *"El criterio de reflexividad es redundante en las condiciones para una relación de equivalencia, ya que de $a \sim b$ y $b \sim a$ (simetría) podemos deducir que $a \sim a$ por transitividad".* Para esto, encuentre una relación que sirva como contraejemplo a la afirmación.

Problema 4. Sea $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Para cada $\Sigma \subseteq L(P)$, definimos $\mathcal{C}(\Sigma)$ como el conjunto de todas las fórmulas en $L(P)$ que son consecuencia lógica de Σ.
Sean $\sim$ y $\preceq$ relaciones definidas en $\mathcal{P}(L(P))$ por:

$$\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \text{ si y solo si } \mathcal{C}(\Sigma_1) = \mathcal{C}(\Sigma_2) \quad \text{y} \quad \Sigma_1 \preceq \Sigma_2 \text{ si y solo si } \mathcal{C}(\Sigma_1) \subseteq \mathcal{C}(\Sigma_2),$$

para todo $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{P}(L(P))$.

a) ¿Es $\sim$ una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(L(P))$? Demuestre o de un contraejemplo.
b) ¿Es $\preceq$ un orden parcial en $\mathcal{P}(L(P))$? Demuestre o de un contraejemplo. En el caso en que no lo sea, encuentre condiciones necesarias para que lo sea.

Problema 5. Una relación $P \subseteq A \times A$ se dice que es un *pre-orden* si es refleja y transitiva. Sea P una relación de pre-orden sobre A. Considere la relación $\sim$ sobre A tal que $a \sim b$ si y solo si $P(a, b)$ y $P(b, a)$, para todo $a, b \in A$.

a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre A.
b) Considere ahora la relación $\preceq$ sobre $A/_\sim$, tal que $[a]_\sim \preceq [b]_\sim$ si y solo si $P(a, b)$, para todo $a, b \in A$. Demuestre que $\preceq$ está bien definida sobre $A/_\sim$. Es decir, demuestre que para todo $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, si $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$ y $[b_1]_\sim = [b_2]_\sim$, entonces se cumple que $[a_1]_\sim \preceq [b_1]_\sim$ si y solo si $[a_2]_\sim \preceq [b_2]_\sim$.
c) Demuestre que $\preceq$ es un orden parcial sobre $A/_\sim$.