IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*) - Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*)

Ayudantía 6.

Consecuencia lógica y conectivos funcionalmente completos.

Problema 1. Demuestre que el conjunto de conectivos lógicos $\mathcal{C} = \{\bot, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo, donde $\bot$ es un conector unario que vale 0, sin importar el valor de las variables proposicionales.

Problema 2. Definimos el conectivo ternario MAYORÍA, denotado por $\mathbb{M}$, de tal forma que para cada valuación σ y $p_1, p_2, p_3 \in P$ se tiene que $\sigma(\mathbb{M}(p_1, p_2, p_3)) = 1$ si y solo si, la mayoría en $\{\sigma(p_1), \sigma(p_2), \sigma(p_3)\}$ es 1.

a) Construya la tabla de verdad correspondiente al conectivo lógico $\mathbb{M}$, usando 3 variables proposicionales.

b) Si consideramos las fórmulas definidas solo con el conectivo $\mathbb{M}$, ¿es posible crear una fórmula que sea una contradicción? Justifique.

c) Si consideramos $P = \{p\}$ y las fórmulas definidas solo con el conectivo $\mathbb{M}$, ¿es posible crear una fórmula que sea equivalente a $(\neg p)$? Justifique.

d) Decida si el conjunto $\{\mathbb{M}\}$ es funcionalmente completo o no. Demuestre.

e) En el caso en que $\{\mathbb{M}\}$ no fuese funcionalmente completo, ¿qué conectivos lógicos podrían agregarse para que sí lo fuese? Justifique y demuestre.

Problema 3. Sea $\mathcal{C}_n$ un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ conectivos lógicos unarios.

a) ¿Cuántos conectivos lógicos unarios distintos (no equivalentes) existen?

b) ¿Cómo serían las fórmulas formadas solo por los conectivos en $\mathcal{C}_n$?, ¿qué problemas pueden traer este tipo de fórmulas?

c) ¿Existe un conjunto de variables proposicionales P tal que toda fórmula $\varphi \in L(P)$ puede ser representada solo con los conectivos en $\mathcal{C}_n$?, ¿es necesario un valor mínimo de n para que esto funcione?

d) Decida si existe un conjunto de conectivos unarios, $\mathcal{C}_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$ que sea funcionalmente completo y demuestre su respuesta.

Definición. Decimos que un conjunto de fórmulas $\Sigma \subseteq L(P)$ es *consistente* o *satisfacible* si existe una valuación σ tal que para todo $\psi \in \Sigma$ se tiene que $\sigma(\psi) = 1$; cuando una valuación σ satisface a un conjunto de fórmulas Σ se suele denotar como $\sigma(\Sigma) = 1$. Por último, dado $\varphi \in L(P)$ y $\Sigma \subseteq L(P)$ decimos que φ es consecuencia lógica de Σ si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$ y se denota como $\Sigma \models \varphi$. ¿Qué se puede decir de la cantidad de valuaciones que satisfacen a Σ y las que satisfacen a φ?, ¿cuál es más grande?

Problema 4. Sea $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\varphi, \psi \in L(P)$. Demuestre o de un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

a) Si $\Sigma \models (\varphi \wedge \psi)$, entonces $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \psi$.

b) Si $\Sigma \models (\varphi \vee \psi)$, entonces $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \psi$.

Problema 5. Sean $\varphi, \psi \in L(P)$. Demuestre que $\{\varphi\} \models \psi$ si y solo si $(\varphi \to \psi)$ es una tautología. Más aun, si $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq L(P)$ es un conjunto finito de fórmulas y $\psi \in L(P)$ demuestre que:

$$\Sigma \models \psi \quad \text{si y solo si} \quad \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i\right) \to \psi\right) \text{ es una tautología.}$$

Problema 6. Sea $\Sigma \subseteq L(P)$ un conjunto de fórmulas y $\varphi \in L(P)$. Demuestre que:

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{si y solo si} \quad \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es un conjunto inconsistente.}$$

Problema 7. Decimos que un conjunto de fórmulas $\Sigma \subseteq L(P)$ es *independiente* si para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $\Sigma \backslash \{\varphi\} \not\models \varphi$. Demuestre que todo conjunto finito de fórmulas $\Sigma \subseteq L(P)$ tiene un subconjunto Σ' que es **equivalente** a Σ, tal que Σ' es un conjunto independiente. Si consideramos el caso en que $\Sigma \subseteq L(P)$ es un conjunto infinito de fórmulas, ¿es verdad que siempre existe un subconjunto de Σ que sea independiente y equivalente a Σ? Analice los casos donde P es un conjunto finito de variables proposicionales y otro donde es infinito.