IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*) - Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*)

Ayudantía 3.

Cosas básicas de lógica proposicional.

Problema 1. Para las siguientes preguntas, considere el conjunto $P = \{p, q, r\}$.

a) Sea $\varphi = ((p \to q) \to p)$ una fórmula en $L(P)$ y sea σ una valuación tal que $\sigma(\varphi) = 0$. ¿Es posible tener el valor de cada variable proposicional con esta información? Determine $\sigma(p)$.

b) Determine cuántas valuaciones existen tal que la siguiente fórmula en $L(P)$ es verdadera:

$$\big(p \lor ((\neg p) \land (q \land r))\big) \to \big(p \to ((\neg q) \land (\neg r))\big).$$

c) Sea $\mathcal{T}(p, q, r)$ un conectivo ternario definido de tal forma que para cada valuación σ se cumple que $\sigma\big(\mathcal{T}(p, q, r)\big) = 1$ si y solo si $3\sigma(p) - 2(\sigma(q) + \sigma(r)) \geq 0$.

Defina una fórmula $\varphi \in L(P)$ usando solo los conectivos $\{\neg, \land, \lor\}$ de tal forma que para cada valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = \sigma\big(\mathcal{T}(p, q, r)\big)$.

Problema 2. Demuestre que para toda fórmula $\varphi \in L(P)$ se tiene que

$$|\varphi| \in \{1, 4, 5\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 7\}.$$

donde $|\varphi|$ corresponde al largo de la fórmula φ.

Problema 3. Sea $p \in P$. Para cada $\varphi, \alpha \in L(P)$ se define recursivamente la fórmula $\varphi[p|\alpha]$, como:

- $\varphi[p|\alpha] = \begin{cases} \varphi & \text{si } \varphi \text{ es una proposición atómica y } \varphi \neq p \\ \alpha & \text{si } \varphi = p \end{cases}$
- Si $\varphi = (\neg\psi)$ con $\psi \in L(P)$: $\varphi[p|\alpha] = (\neg\psi[p|\alpha])$.
- Si $\varphi = (\psi_1 \star \psi_2)$ con $\psi_1, \psi_2 \in L(P)$ y $\star \in \{\lor, \land, \to, \leftrightarrow\}$: $\varphi[p|\alpha] = (\psi_1[p|\alpha] \star \psi_2[p|\alpha])$.

De manera intuitiva, ¿qué representa la fórmula $\varphi[p|\alpha]$?, ¿está en $L(P)$?

a) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in L(P)$ dos fórmulas lógicamente equivalentes. Demuestre que para todo $\varphi \in L(P)$ se tiene que $\varphi[p|\alpha_1]$ es lógicamente equivalente con $\varphi[p|\alpha_2]$.

b) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in L(P)$ dos fórmulas lógicamente equivalentes. Demuestre que dado $\alpha \in L(P)$ se tiene que $\varphi_1[p|\alpha]$ es lógicamente equivalente a $\varphi_2[p|\alpha]$.

Problema 4. Sea $\varphi \in L(P)$ una fórmula que solo tiene los conectivos $\wedge, \vee$ y $\neg$. Sea φ^* la fórmula que se obtiene a partir de φ, reemplazando los conectivos $\wedge$ por $\vee$, $\vee$ por $\wedge$ y cada letra proposicional $p \in P$ por $(\neg p)$. Por ejemplo, si $\varphi = (p \wedge (\neg q))$ entonces $\varphi^* = ((\neg p) \vee (\neg(\neg q)))$. La fórmula φ^* es llamada el *dual de* φ. Realice una definición inductiva para formar el dual de φ y demuestre que φ^* es lógicamente equivalente a $(\neg\varphi)$.

Problema 5. Un conjunto $\Sigma \subset L(P)$ se dice satisfacible si existe una valuación σ tal que para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$ y se suele denotar como $\sigma(\Sigma) = 1$.

Un conjunto de fórmulas $\Sigma \subset L(P)$ se dice que es *finitamente satisfacible* si se tiene que todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Sea $p \in P$ una variable proposicional cualquiera. Demuestre que si $\Sigma \subset L(P)$ es un conjunto finitamente sastisfacible, entonces se tiene que $\Sigma \cup \{p\}$ o $\Sigma \cup \{(\neg p)\}$ es finitamente satisfacible. ¿Pueden ser ambos conjuntos finitamente sastisfacibles? ¿En qué casos ocurriría?

Problema 6. Sea $\varphi \in L(P)$ una fórmula proposicional con $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Si se sabe que su tabla de verdad está construida como:

p_1	p_2	p_3	p_4	φ
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

y que φ vale 0 en el resto de los casos.

a) Encuentre una posible representación de la fórmula φ usando sólo los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Esta fórmula que encontró, ¿es la única que se puede formar? ¿cuántas más pueden existir?

b) Definimos los conectivos binarios NAND y NOR, respectivamente, como sigue:

$$A \mid B := \neg(A \wedge B), \qquad A \downarrow B := \neg(A \vee B).$$

Encuentre dos fórmulas ψ_1 y ψ_2 que sean lógicamente equivalentes a φ, donde solo se ocupen los conectores NAND y NOR, respectivamente. ¿Qué se puede decir de esto? ¿Se puede hacer lo mismo con cualquier fórmula en $L(P)$ que sea dada?