Pontificia Universidad Católica de Chile - Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias de la Computación
IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*) - Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*)

Ayudantía 2

Problema 1

Los números de Johnson tienen una importancia que no es muy apreciada entre los matemáticos. Se definen de la siguiente forma:

- 0 es un número de Johnson.
- Si n es un número de Johnson, $n + 4$ es un número de Johnson.
- Si n es un número de Johnson, $n + 7$ es un número de Johnson.

A continuación, se pide demostrar que 785 es un número de Johnson. Se puede hacer esto con inducción simple? Explique.

Problema 2

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y sean $w_1 = 0$ y $w_2 = 11$ dos palabras en Σ^*. Sea $\mathcal{C} \subset \Sigma^*$ el conjunto de las palabras producidas por todas las concatenaciones arbitrarias de w_1 y w_2. Por ejemplo, $w = w_1 w_2 w_1 w_1 = 01100$ es una palabra que está en $\mathcal{C}$. Sea ℓ_n la cantidad de palabras en $\mathcal{C}$ que tienen largo n (es decir, n caracteres). Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\ell_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi - \psi},$$

donde φ y ψ son las soluciones de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

Problema 3

Sea $w \in \Sigma^*$. El reverso de la palabra w, denotado por w^r, corresponde a la secuencia invertida de los símbolos en w. Así, si Σ corresponde al conjunto de las letras del alfabeto latín, y $w = casa$ entonces $w^r = asac$. Defina de manera inductiva las operaciones reverso y concatenación ($\circ$) y demuestre:

$$(w \circ v)^r = v^r \circ w^r$$

Problema 4

Un criterio de divisibilidad es una regla que sirve para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división. Un criterio de divisibilidad para el 7 consiste en tomar un número y quitarle su cifra menos significativa, multiplicar este dígito por dos y restárselo al resto del número. Si el resultado es divisible por 7, entonces el número original también lo era. Por ejemplo, el número 343 lo separamos en 34 y 3, multiplicamos el 3 por 2, y se lo restamos a 34, y tenemos $34 - 6 = 28$, luego 343 es divisible por 7. Suponga que este procedimiento es correcto. Lo que ahora nos interesa es qué ocurre cuando se aplica consecutivamente.

- Al aplicar consecutivamente el criterio de divisibilidad por 7 a un número de la forma $21k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, siempre se llega a 0.
- Al aplicarlo a un número de la forma $21k + 7$, se llega a -14.
- Al aplicarlo a un número de la forma $21k + 14$, se llega a -7.

Demuestre por induccion (fuerte) estas afirmaciones. *Hint:* Todo número n puede ser expresado como $n = 10a + b$, donde $b < 10$ y $a < n$.