IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*) - Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*)

Ayudantía 16.

Repaso para el examen.

Problema 1. Sea $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ con $n \geq 10$. Demuestre que existe $\varphi \in L(P)$ tal que toda fórmula en $L(P)$ equivalente a φ tiene largo mayor o igual a n^2.

Problema 2. Sea $\mathcal{B} = \{0,1\}^\omega$ el conjunto de todas las secuencias binarias infinitas.

a) Demuestre que $\mathcal{B}$ no es numerable.

b) Sea $\sim$ una relación sobre $\mathcal{B}$ tal que para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ se tiene que $B_1 \sim B_2$ si y solo si B_1 y B_2 *"terminan"* igual. Por ejemplo, tendremos que las secuencias binarias $100111111\ldots$ y $11111111\ldots$ están relacionadas bajo $\sim$, ya que *"terminan"* con puros 1 hacia el infinito.
Formalice esta definición y demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{B}$.

c) Un *tail end* de $B \in \mathcal{B}$ se define como la clase de equivalencia de B bajo $\sim$ en $\mathcal{B}$.
Demuestre que para cualquier $B \in \mathcal{B}$, se tiene que $[B]_\sim$ es numerable.

d) Demuestre que la unión de todos los tail ends corresponde a $\mathcal{B}$.

e) Demuestre que la cantidad de *tail ends* en $\mathcal{B}$ es no numerable.

Problema 3. Sea $\mathcal{L} = \{\cdot, +\}$ donde $\cdot$ y $+$ son funciones binarias y sea $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, \cdot^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}} \rangle$ la $\mathcal{L}$-estructura con la multiplicación y suma usual en los reales.
Construya una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x,y)$ tal que $(\mathfrak{R}, \sigma) \models \varphi(x,y)$ si y solo si $\sigma(x) < \sigma(y)$, donde σ es una asignación para $\mathfrak{R}$ y $<$ corresponde al orden usual en $\mathbb{R}$.

Problema 4. Sea $\mathcal{L} = \{0,1\}$, donde 0 y 1 son constantes. Sea $\varphi \in L(P)$ una fórmula cualquiera.
Construya una $\mathcal{L}$-oración ψ de tal forma que φ es satisfacible si y solo si ψ es válida. Demuestre.

Problema 5. Sea $n \geq 3$ un número natural fijo. Considere el siguiente algoritmo que calcula $2^a \mod n$ para $a \geq 1$:

```
function EXP_n(int a)
    if a = 1 then
        return 2
    else if a mód 2 = 0 then
        return EXP_n(a/2) · EXP_n(a/2) mód n
    else
        return 2 · EXP_n((a − 1)/2) · EXP_n((a − 1)/2) mód n
    end if
end function
```

Sea $T_n(a)$ el número de multiplicaciones, divisiones y cálculos de módulo que hace el algoritmo $\textsc{exp}_n(a)$ en el peor caso. Determine una ecuación de recurrencia para $T_n(a)$ con $a \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Resuelva la recurrencia y determine una función f tal que $T_n \in O(f)$.