IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*) - Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*)

Ayudantía 12.

Más de Lógica de Primer Orden.

Problema 1. Suponga que usted se encuentra en un Pub. Considere la siguiente afirmación:

"*Hay una persona en el Pub tal que si esa persona está tomando, entonces todas las personas que están en el Pub también están tomando*"

a) Defina un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-oración φ y una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ que represente esta situación.

b) ¿Es φ verdad bajo la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$? Demuestre o de un contraejemplo.

c) ¿Existe alguna $\mathcal{L}$-estructura distinta a $\mathfrak{A}$, donde φ sea falsa? Justifique.

Problema 2. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Decimos que el conjunto $\mathcal{P} \subseteq |\mathfrak{A}|$ es *definible* en $\mathfrak{A}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que:

$$\mathcal{P} = \{a \in |\mathfrak{A}| \,:\, \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}.$$

Sea $\mathcal{L} = \{+\}$ un vocabulario, donde $+$ es una función de aridad 2 y sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura donde $+^{\mathfrak{A}}$ es la suma usual en los naturales.

a) Construya una $\mathcal{L}$-fórmula φ_0 que defina al 0 en $\mathfrak{A}$, es decir, considerando $\mathcal{P} = \{0\}$.

b) Construya una $\mathcal{L}$-fórmula φ_1 que defina al 1 en $\mathfrak{A}$.

c) ¿Es posible definir la relación de sucesor en $\mathfrak{A}$? Es decir, definir una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi_s(x, y)$, con dos variables libres, tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_s(x, y)$ si y solo si el sucesor de x es y bajo $\mathfrak{A}$.

d) Si consideramos el vocabulario $\mathcal{L}_0 = \emptyset$ y la $\mathcal{L}_0$-estructura $\mathfrak{A}_0 = \langle \mathbb{N} \rangle$. ¿Es posible definir el 0 en $\mathfrak{A}_0$? ¿Cómo se podría demostrar efectivamente esto?

Problema 3. Sea $\mathcal{L} = \{+\}$, donde $+$ es una función de aridad 2. Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$ la $\mathcal{L}$-estructura donde $+^{\mathfrak{A}}$ es interpretado como la suma usual sobre los números naturales y sea $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, +^{\mathfrak{B}} \rangle$, la $\mathcal{L}$-estructura donde $+^{\mathfrak{B}}$ es interpretado como la suma por componentes de las tuplas de números naturales, es decir, para cada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se tiene que $(a, b) +^{\mathfrak{B}} (c, d) = (a +^{\mathfrak{A}} c, b +^{\mathfrak{A}} d)$.

Construya una $\mathcal{L}$-oración φ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

Problema 4. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras, para algún vocabulario $\mathcal{L}$. Una función $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ que es sobreyectiva se dice que es un *homomorfismo débil* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, si cumple que:

- Para cada relación $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y una k-tupla de $\mathcal{L}$-términos bajo la interpretación de $\mathfrak{A}$, $(a_1^{\mathfrak{A}}, \dots, a_k^{\mathfrak{A}})$, se tiene que si $(a_1^{\mathfrak{A}}, \dots, a_k^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}}$,entonces $\big(h(a_1^{\mathfrak{A}}), \dots, h(a_k^{\mathfrak{A}})\big) \in R^{\mathfrak{B}}$.
- Para cada función $f \in \mathcal{L}$ de aridad k y una k-tupla de $\mathcal{L}$-términos bajo la interpretación de $\mathfrak{A}$, $(a_1^{\mathfrak{A}}, \dots, a_k^{\mathfrak{A}})$, se tiene que $h\big(f^{\mathfrak{A}}(a_1^{\mathfrak{A}}, \dots, a_k^{\mathfrak{A}})\big) = f^{\mathfrak{B}}\big(h(a_1^{\mathfrak{A}}), \dots, h(a_k^{\mathfrak{A}})\big)$.

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras con $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sea h un homomorfismo débil de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ y sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula construida solo por fórmulas atómicas, los conectores $\wedge$ y $\vee$ y los cuantificadores existenciales y universales. Sea σ una asignación para $\mathfrak{A}$. Demuestre que para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ: si $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$, entonces $(\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi$. Use esto para responder el **Problema 2.**d).

Problema 5. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones tal que para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ se tiene que $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \neg\varphi$. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Demuestre que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y solo si $\Sigma \models \varphi$.

Problema 6. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones. Decimos que Σ es una *teoría* si:

- Σ es un conjunto satisfacible, es decir, existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$.
- Σ es cerrado bajo consecuencia lógica, es decir, si φ es una $\mathcal{L}$-oración tal que $\Sigma \models \varphi$, entonces se tiene que $\varphi \in \Sigma$.

Sea $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ una lista de $\mathcal{L}$-estructuras sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, y $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-oraciones φ tal que $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Demuestre que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$ es una teoría.