IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*) - Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*)

Ayudantía 11.

Lógica de Primer Orden.

Problema 1. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera y para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ se define $\mathcal{E}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores existenciales en φ, $\mathcal{U}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores universales en φ y $\mathcal{C}(\varphi)$ como el número total de cuantificadores en φ.

Defina inductivamente estas funciones y demuestre que $\mathcal{C}(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi) + \mathcal{U}(\varphi)$ para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ.

Problema 2. Diremos que una sustitución de una variable x, por una constante c en una $\mathcal{L}$-fórmula φ corresponde a la $\mathcal{L}$-fórmula correspondiente al cambiar todas las ocurrencias de x como variable libre, por $c \in \mathcal{L}$ en φ. Esta sustitución se suele denotar como $\varphi[c|x]$. Dado un vocabulario $\mathcal{L}$:

a) Defina inductivamente $\varphi[c|x]$, para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ, c constante en $\mathcal{L}$ y x una variable.

b) Sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula cualquiera, a, b dos constantes en $\mathcal{L}$ y x, y dos variables libres distintas en φ. Demuestre que al hacer sustituciones iteradas, no importa el orden en que se hacen.
Es decir, demuestre que:
$$(\varphi[a|x])[b|y] = (\varphi[b|y])[a|x].$$

Problema 3. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ un vocabulario, donde $<$ es una relación binaria.

Sean $\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{N}, <^{\mathfrak{A}_1} \rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{Z}, <^{\mathfrak{A}_2} \rangle$, $\mathfrak{A}_3 = \langle \mathbb{Q}, <^{\mathfrak{A}_3} \rangle$, $\mathfrak{A}_4 = \langle \mathbb{Q} \cap [0,1], <^{\mathfrak{A}_4} \rangle$ cuatro $\mathcal{L}$-estructuras, donde $<^{\mathfrak{A}_i}$ es representado como el orden usual para cada $i \in \{1,2,3,4\}$.

Construya cuatro $\mathcal{L}$-oraciones, $\{\varphi_i\}_{i=1}^4$, de tal forma que para cada $i \in \{1,2,3,4\}$ se tenga que φ_i es verdad para la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}_i$, pero falsa para el resto de las $\mathcal{L}$-estructuras definidas.

Problema 4. Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario para representar grafos, es decir, E es una relación binaria.

Encuentre una $\mathcal{L}$-oración φ que represente las siguientes propiedades:

a) Un grafo contiene un k-clique, para $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

b) Un grafo contiene un camino de largo k, para $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

c) Un grafo contiene una k-rueda, para $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

d) Un grafo tiene dos nodos, tal que su distancia es k, para $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.