Ayudantía 11 - Matemáticas Discretas

Lógica de Primer Orden

Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*)

30 de octubre de 2014

Definición. $\mathcal{L}$-términos

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$ compuesto por constantes, relaciones y funciones definimos el conjunto de los $\mathcal{L}$-términos como el menor conjunto que satisface que:

- Cada constante $c \in \mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$-término.
- Cada variable x es un $\mathcal{L}$-término.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y f es una función de aridad n en el vocabulario $\mathcal{L}$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces tendremos que $f(t_1, \ldots, f_n)$ es un $\mathcal{L}$-término.

Consideraremos una cantidad infinita (o la necesaria) de variables.

Intuitivamente, los $\mathcal{L}$-términos son los *elementos* que usaremos en las fórmulas lógicas.

Recordemos también las $\mathcal{L}$-fórmulas

Definición. $\mathcal{L}$-fórmulas

Considerando el mismo vocabulario $\mathcal{L}$, definimos el conjunto de las $\mathcal{L}$-fórmulas como el menor conjunto que cumple:

- Si t_1, t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $(t_1 = t_2)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y R una relación de aridad n en $\mathcal{L}$, para $n \in \mathbb{N}$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si φ y ψ son $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$ y $(\varphi \star \psi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas, donde $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- Si φ es una $\mathcal{L}$-fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x \varphi)$ y $(\forall x \varphi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

Esto resulta ser una definición inductiva, ¿cómo sería el caso base y el caso inductivo?

Problema 1

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera y para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ se define $\mathcal{E}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores existenciales en φ, $\mathcal{U}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores universales en φ y $\mathcal{C}(\varphi)$ como el número total de cuantificadores en φ.

Problema 1

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera y para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ se define $\mathcal{E}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores existenciales en φ, $\mathcal{U}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores universales en φ y $\mathcal{C}(\varphi)$ como el número total de cuantificadores en φ.

Por ejemplo, si R_1, R_2 son dos relaciones en $\mathcal{L}$ y φ sea la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula:

$$\varphi = \forall y((\forall x R_1(x)) \rightarrow (\exists z R_2(z, y))).$$

Problema 1

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera y para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ se define $\mathcal{E}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores existenciales en φ, $\mathcal{U}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores universales en φ y $\mathcal{C}(\varphi)$ como el número total de cuantificadores en φ.

Por ejemplo, si R_1, R_2 son dos relaciones en $\mathcal{L}$ y φ sea la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula:

$$\varphi = \forall y((\forall x R_1(x)) \rightarrow (\exists z R_2(z, y))).$$

Tendremos que $\mathcal{E}(\varphi) = 1$, $\mathcal{U}(\varphi) = 2$ y que $\mathcal{C}(\varphi) = 3$.

Problema 1

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera y para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ se define $\mathcal{E}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores existenciales en φ, $\mathcal{U}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores universales en φ y $\mathcal{C}(\varphi)$ como el número total de cuantificadores en φ.

Por ejemplo, si R_1, R_2 son dos relaciones en $\mathcal{L}$ y φ sea la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula:

$$\varphi = \forall y((\forall x R_1(x)) \to (\exists z R_2(z, y))).$$

Tendremos que $\mathcal{E}(\varphi) = 1$, $\mathcal{U}(\varphi) = 2$ y que $\mathcal{C}(\varphi) = 3$.

¿Qué relacion natural existe entre $\mathcal{E}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{C}$?

Problema 1

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera y para cada $\mathcal{L}$-fórmula φ se define $\mathcal{E}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores existenciales en φ, $\mathcal{U}(\varphi)$ como la cantidad de cuantificadores universales en φ y $\mathcal{C}(\varphi)$ como el número total de cuantificadores en φ.

Por ejemplo, si R_1, R_2 son dos relaciones en $\mathcal{L}$ y φ sea la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula:

$$\varphi = \forall y((\forall x R_1(x)) \to (\exists z R_2(z, y))).$$

Tendremos que $\mathcal{E}(\varphi) = 1$, $\mathcal{U}(\varphi) = 2$ y que $\mathcal{C}(\varphi) = 3$.

¿Qué relacion natural existe entre $\mathcal{E}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{C}$?

Defina inductivamente estas funciones y demuestre que para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ:

$$\mathcal{C}(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi) + \mathcal{U}(\varphi).$$

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sean ψ_1 y ψ_2 dos $\mathcal{L}$-fórmulas, donde ψ_1 tiene una variable libre y ψ_2 tiene dos variables libres. Sea φ la $\mathcal{L}$-fórmula definida como:

$$\varphi = \forall y\ \big((\forall x \psi_1(x)) \rightarrow \psi_2(x, y) \big).$$

Sustituciones

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sean ψ_1 y ψ_2 dos $\mathcal{L}$-fórmulas, donde ψ_1 tiene una variable libre y ψ_2 tiene dos variables libres. Sea φ la $\mathcal{L}$-fórmula definida como:

$$\varphi = \forall y \, (\, (\forall x \psi_1(x)) \rightarrow \psi_2(x, y) \,).$$

¿Cuántas variables libres tiene φ?

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sean ψ_1 y ψ_2 dos $\mathcal{L}$-fórmulas, donde ψ_1 tiene una variable libre y ψ_2 tiene dos variables libres. Sea φ la $\mathcal{L}$-fórmula definida como:

$$\varphi = \forall y \ ((\forall x \psi_1(x)) \rightarrow \psi_2(x, y)).$$

¿Cuántas variables libres tiene φ? Solo una.

Sustituciones

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sean ψ_1 y ψ_2 dos $\mathcal{L}$-fórmulas, donde ψ_1 tiene una variable libre y ψ_2 tiene dos variables libres. Sea φ la $\mathcal{L}$-fórmula definida como:

$$\varphi = \forall y \, ((\forall x \psi_1(x)) \rightarrow \psi_2(x, y)).$$

¿Cuántas variables libres tiene φ? Solo una.

Diremos que una sustitución de una variable x, por una constante c en una $\mathcal{L}$-fórmula φ corresponde a cambiar todas las ocurrencias de x como variable libre, por c en φ.

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sean ψ_1 y ψ_2 dos $\mathcal{L}$-fórmulas, donde ψ_1 tiene una variable libre y ψ_2 tiene dos variables libres. Sea φ la $\mathcal{L}$-fórmula definida como:

$$\varphi = \forall y \, ((\forall x \psi_1(x)) \to \psi_2(x, y)).$$

¿Cuántas variables libres tiene φ? Solo una.

Diremos que una sustitución de una variable x, por una constante c en una $\mathcal{L}$-fórmula φ corresponde a cambiar todas las ocurrencias de x como variable libre, por c en φ.

¿Cómo sería reemplazar x por una constante c en φ definido más arriba?

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sean ψ_1 y ψ_2 dos $\mathcal{L}$-fórmulas, donde ψ_1 tiene una variable libre y ψ_2 tiene dos variables libres. Sea φ la $\mathcal{L}$-fórmula definida como:

$$\varphi = \forall y \, ((\forall x \psi_1(x)) \rightarrow \psi_2(x, y)).$$

¿Cuántas variables libres tiene φ? Solo una.

Diremos que una sustitución de una variable x, por una constante c en una $\mathcal{L}$-fórmula φ corresponde a cambiar todas las ocurrencias de x como variable libre, por c en φ.

¿Cómo sería reemplazar x por una constante c en φ definido más arriba?
Simplemente sería $\forall y \, ((\forall x \psi_1(x)) \rightarrow \psi_2(\mathbf{c}, y))$.

Sustituciones

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Sean ψ_1 y ψ_2 dos $\mathcal{L}$-fórmulas, donde ψ_1 tiene una variable libre y ψ_2 tiene dos variables libres. Sea φ la $\mathcal{L}$-fórmula definida como:

$$\varphi = \forall y \; (\, (\forall x \psi_1(x)) \; \rightarrow \; \psi_2(x, y) \,).$$

¿Cuántas variables libres tiene φ? Solo una.

Diremos que una sustitución de una variable x, por una constante c en una $\mathcal{L}$-fórmula φ corresponde a cambiar todas las ocurrencias de x como variable libre, por c en φ.

¿Cómo sería reemplazar x por una constante c en φ definido más arriba?
Simplemente sería $\forall y \; (\, (\forall x \psi_1(x)) \; \rightarrow \; \psi_2(\mathbf{c}, y) \,)$.

Ejercicio

Si P es una relación binaria en $\mathcal{L}$, encuentre la sustitución de la variable x por la constante $c \in \mathcal{L}$ en la $\mathcal{L}$-fórmula ψ definida como:

$$\psi = (\forall x P(x, y)) \; \rightarrow \; (\exists y P(x, y)).$$

Problema 2

Construya una definición inductiva para $\varphi[c|x]$, que corresponde a la $\mathcal{L}$-fórmula correspondiente a la sustitución de todas las veces que x aparece como una variable libre en φ, por la consante $c \in \mathcal{L}$.

Problema 2

Construya una definición inductiva para $\varphi[c|x]$, que corresponde a la $\mathcal{L}$-fórmula correspondiente a la sustitución de todas las veces que x aparece como una variable libre en φ, por la consante $c \in \mathcal{L}$.

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula y sean a, b dos constantes en $\mathcal{L}$.

Sean x e y dos variables libres **distintas** en φ.

Demuestre que al hacer sustituciones iteradas, no importa el órden en que se hacen.

Es decir, demuestre que:

$$(\varphi[a|x])[b|y] = (\varphi[b|y])[a|x].$$

Problema 2

Construya una definición inductiva para $\varphi[c|x]$, que corresponde a la $\mathcal{L}$-fórmula correspondiente a la sustitución de todas las veces que x aparece como una variable libre en φ, por la consante $c \in \mathcal{L}$.

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula y sean a, b dos constantes en $\mathcal{L}$.

Sean x e y dos variables libres **distintas** en φ.

Demuestre que al hacer sustituciones iteradas, no importa el órden en que se hacen.

Es decir, demuestre que:

$$(\varphi[a|x])[b|y] = (\varphi[b|y])[a|x].$$

Solución de la primera parte: Dado un $\mathcal{L}$-término t, definiremos la sustición en t de la variable x por la constante c, que denotaremos como $[t]^x_c$, definida inductivamente como

- Si $t = x$, entonces $[t]^x_c = c$.
- Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ para una función de aridad n, $f \in \mathcal{L}$, y los $\mathcal{L}$-términos $t_1, \ldots, t_n$, entonces $[t]^x_c = f([t_1]^x_c, \ldots, [t_n]^x_c)$.
- En cualquier otro caso $[t]^x_c = t$.

Ahora, definimos lo pedido. Sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula.

- Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ con t_1, t_2 $\mathcal{L}$-términos, entonces $\varphi[c|x] = ([t_1]^x_c = [t_2]^x_c)$.
- Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ donde $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y R una relación n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $\varphi[c|x] = R([t_1]^x_c, \ldots, [t_n]^x_c)$.
- Si $\varphi = (\neg\psi)$ para alguna $\mathcal{L}$-fórmula ψ, entonces $\varphi[c|x] = (\neg\psi[c|x])$.
- Si $\varphi = (\psi_1 \star \psi_2)$ para ψ_1 y ψ_2 $\mathcal{L}$-fórmulas y $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $\varphi[c|x] = (\psi_1[c|x] \star \psi_2[c|x])$.
- Si $\varphi = (Qy\psi)$ para alguna $\mathcal{L}$-fórmula ψ, $Q \in \{\forall, \exists\}$ e y una variable, entonces

$$\varphi[c|x] = \begin{cases} (Qy\psi) & \text{si } x = y \\ (Qy\psi[c|x]) & \text{si no} \end{cases}$$

Problema 3

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ un vocabulario, donde $<$ es una relación binaria.

Sean las siguientes $\mathcal{L}$-estructuras definidas como:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= \langle \mathbb{N}, <^{\mathfrak{A}_1} \rangle \\
\mathfrak{A}_2 &= \langle \mathbb{Z}, <^{\mathfrak{A}_2} \rangle \\
\mathfrak{A}_3 &= \langle \mathbb{Q}, <^{\mathfrak{A}_3} \rangle \\
\mathfrak{A}_4 &= \langle \mathbb{Q} \cap [0, 1], <^{\mathfrak{A}_4} \rangle
\end{aligned}$$

donde $<^{\mathfrak{A}_i}$ es representado como el orden usual para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Problema 3

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ un vocabulario, donde $<$ es una relación binaria.

Sean las siguientes $\mathcal{L}$-estructuras definidas como:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= \langle \mathbb{N}, <^{\mathfrak{A}_1} \rangle \\
\mathfrak{A}_2 &= \langle \mathbb{Z}, <^{\mathfrak{A}_2} \rangle \\
\mathfrak{A}_3 &= \langle \mathbb{Q}, <^{\mathfrak{A}_3} \rangle \\
\mathfrak{A}_4 &= \langle \mathbb{Q} \cap [0,1], <^{\mathfrak{A}_4} \rangle
\end{aligned}$$

donde $<^{\mathfrak{A}_i}$ es representado como el orden usual para cada $i \in \{1,2,3,4\}$.

Construya cuatro $\mathcal{L}$-oraciones, φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4, de tal forma que para cada $i \in \{1,2,3,4\}$ se tenga que φ_i es verdad bajo la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}_i$, pero falsa para el resto de las $\mathcal{L}$-estructuras definidas.

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario para representar grafos, es decir, E es una relación binaria.

Tenemos que toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ representará a un grafo en particular.

Decimos que una $\mathcal{L}$-oración φ define una propiedad $\mathcal{P}$ en grafos, si toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ (que representa a un grafo G) satisface a φ si y solo si el grafo G respectivo cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Problema 4

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario para representar grafos, es decir, E es una relación binaria.

Tenemos que toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ representará a un grafo en particular.

Decimos que una $\mathcal{L}$-oración φ define una propiedad $\mathcal{P}$ en grafos, si toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ (que representa a un grafo G) satisface a φ si y solo si el grafo G respectivo cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Encuentre una $\mathcal{L}$-oración φ que represente las siguientes propiedades:

1. Un grafo contiene un k-clique, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Problema 4

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario para representar grafos, es decir, E es una relación binaria.

Tenemos que toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ representará a un grafo en particular.

Decimos que una $\mathcal{L}$-oración φ define una propiedad $\mathcal{P}$ en grafos, si toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ (que representa a un grafo G) satisface a φ si y solo si el grafo G respectivo cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Encuentre una $\mathcal{L}$-oración φ que represente las siguientes propiedades:

1. Un grafo contiene un k-clique, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. Un grafo contiene un camino de largo k, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Problema 4

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario para representar grafos, es decir, E es una relación binaria.

Tenemos que toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ representará a un grafo en particular.

Decimos que una $\mathcal{L}$-oración φ define una propiedad $\mathcal{P}$ en grafos, si toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ (que representa a un grafo G) satisface a φ si y solo si el grafo G respectivo cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Encuentre una $\mathcal{L}$-oración φ que represente las siguientes propiedades:

1. Un grafo contiene un k-clique, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. Un grafo contiene un camino de largo k, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. Un grafo contiene una k-rueda, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Problema 4

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario para representar grafos, es decir, E es una relación binaria.

Tenemos que toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ representará a un grafo en particular.

Decimos que una $\mathcal{L}$-oración φ define una propiedad $\mathcal{P}$ en grafos, si toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ (que representa a un grafo G) satisface a φ si y solo si el grafo G respectivo cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Encuentre una $\mathcal{L}$-oración φ que represente las siguientes propiedades:

1. Un grafo contiene un k-clique, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. Un grafo contiene un camino de largo k, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
3. Un grafo contiene una k-rueda, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
4. Un grafo tiene dos nodos, tal que su distancia es k, para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.