IIC1253 - Sección 1 - Segundo Semestre 2014
Profesor: Marcelo Arenas
Ayudantes: Matías San Martín (*masanmartin@uc.cl*) - Martín Muñoz (*mmunos@uc.cl*)

Ayudantía 1.

Un poco de inducción.

Problema 1. Demuestre que cualquier tablero de $2^n \times 2^n$, con $n \in \mathbb{N}$, se puede completar por trominós en forma de L si es que antes se remueve un cuadrado de alguna de las esquinas del tablero. ¿Es posible hacer esto mismo si se remueve un cuadrado cualquiera del tablero?

Problema 2. Supongamos que queremos demostrar que cualquier grupo de caballos son del mismo color. Para esto, hacemos lo siguiente: El caso base es trivial, porque si tomamos un solo caballo obviamente es de un solo color. Supongamos ahora, que se cumple la propiedad para k. Consideremos un grupo de $k+1$ caballos $\mathcal{C}$, enumerados como $c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}$. Llamemos $\mathcal{C}_1$ al conjunto de caballos $\mathcal{C}$ menos el caballo c_{k+1} y $\mathcal{C}_2$ de la misma forma, pero sin el caballo c_2.

Notamos que tanto $\mathcal{C}_1$ como $\mathcal{C}_2$, tienen k elementos y, por H.I., todos sus elementos son iguales. Luego, c_1, c_2 y c_{k+1} tienen el mismo color. Por lo tanto, todos los caballos en $\mathcal{C}$ tienen el mismo color. Lo que termina la demostración.

No obstante, esta propiedad es claramente falsa. ¿Qué es lo que está mal?

Problema 3. Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se dice que es una *sucesión aritmética de diferencia* $d \in \mathbb{R}$, si para cada $n \in \mathbb{N}$ cumple que $a_{n+1} - a_n = d$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, el término general de la sucesión está dado por:

$$a_n = a_0 + nd.$$

Problema 4. Suponga que entre cada par de ciudades de un país existe un camino de un sentido que las conecta en una dirección o la otra. Demuestre utilizando inducción que existe una ciudad que puede ser alcanzada desde cualquier otra ciudad ya sea de forma directa o pasando por exactamente una ciudad diferente.

Problema 5. Suponga el siguiente juego: Hay dos personas mirándose cara a cara, llamémoslas Matías y Martín. Una tercera persona escribe dos números naturales ***consecutivos*** y le entrega uno a cada jugador, de manera que ninguno de los dos sabe qué número le tocó. Cada jugador es capaz de ver el número de su contrincante en todo momento (pero no el suyo). El juego comienza con un jugador, digamos Matías, preguntándole a Martín si sabe cuál es su número. Si está seguro de qué número le tocó, entonces lo dirá y el juego acabará (al responder se está completamente seguro y no es una decisión probabilística); en caso que no sepa, responderá **no** y luego Martín le hará la misma pregunta a Matías. Se seguirán preguntando hasta que alguno de los jugadores sepa cuál es el número que le tocó y ahí se termina el juego. Asuma que los dos jugadores son unos expertos en lógica y razonamiento, por lo que responderán con total seguridad en cada turno. Ahora, este juego ¿tiene un fin asegurado?, ¿en qué momentos ocurre? Argumente y demuéstrelo.

Recomendación: Analice el problema, revise los casos más simples, sea capaz de encontrar alguna propiedad y demuéstrela por inducción.